Engelbrektsson, Nils

Meddelande till matematiska kongressen i Stockholm (22-25 sept. 1909).

Lund : Lindstedts bokh.
1909

EOD – Miljoner böcker bara en knapptryckning bort. I mer än 10 europeiska länder!

Tack för att du väljer EOD!

Europeiska bibliotek har miljontals böcker från 1400- till 1900-talet i sina samlingar. Alla dessa böcker går nu att få som e-böcker – de är bara ett musklick bort. Sök i katalogen från något av biblioteken i eBooks on Demand- nätverket (EOD) och beställ boken som e-bok – tillgängligt från hela världen, 24 timmar per dag och 7 dagar i veckan. Boken digitaliseras och blir tillgänglig för dig som e-bok.

EOD bokens fördelar!

- Få samma utseende och känsla som med originalet!
- Använd ditt standardprogram för att läsa boken på skärmen, zooma och navigera genom boken.
- Skriv ut enstaka sidor eller hela boken.
- *Sök*: Använd fulltextsökning för enskilda fraser.
- *Klipp & klistra*: Kopiera bilder och delar av texten till andra applikationer (t.ex. ordbehandlingsprogram).

Villkor för användning

Genom att använda EOD-tjänsten accepterar du de villkor som ställs av biblioteket som äger den aktuella boken.

- Villkoren på svenska: http://books2ebooks.eu/odm/html/nls/sv/agb.html

Fler e-böcker

Redan nu erbjuder 30 bibliotek från 12 europeiska länder denna service.
Mer information finns tillgängliga via http://books2ebooks.eulla boken.

- http://search.books2ebooks.eu/

MEDDELANDE

TILL

MATEMATISKA KONGRESSEN
I STOCKHOLM

(22—25 SEPT. 1909)

AF

NILS ENGELBREKTSSON

LUND
PH. LINDSTEDTS UNIVERSITETS-BOKHANDEL
(A. O. & SCHEDIN).

Pris 50 öre.

1909

MEDDELANDE

TILL

MATEMATISKA KONGRESSEN
I STOCKHOLM

(22—25 SEPT. 1909)

AF

NILS ENGELBREKTSSON
V. ADJUNKT VID GÖTEBORGS HÖGRE LATINLÄROVERK

LUND 1909
HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI

Inbjudning till en skandinavisk matematisk kongress har utgått från bland andra professorerna Bendixson, Mittag-Leffler, Phragmén och Wiman. Jag har vid olika tillfällen vändt mig till inbjudarne i fråga med begäran om intagandet i svensk facktidskrift af mina matematiska arbeten. Man har svarat mig beträffande min metod — det stränga sammanhang genom hvilket jag förbundit vissa nya uppslag som jag gjort med annan matematik som finns — att den tillhör den filosofiska vetenskapen. Min invändning till försvar för metoden, att den lemnar lösningen på åtskilliga rent matematiska uppgifter hvilka hittills icke fått sin lösning oaktadt alla försök som gjorts, har lemnats obesvarad. Jag tyder inbjudarnes mening för så vidt den rör mig till det, att de tagit parti mot min matematiskt—vetenskapliga verksamhet, och att de velat säga mig att deras ståndpunkt är en gång för alla gifven. Jag kan därför icke begagna mig directe af den inbjudan som utgått. Endast indirecte — med bortseende från inbjudarnes ledareskap — kan jag begagna mig af den.

Göteborg i Juli 1909.

Nils Engelbrektsson.

§ 1.

Om den allmänna motsatsen mellan enheter i Monges system [1]).

Med operationskategorien $\mathfrak{D}$ förstå vi ett integrabelt differentialuttryck i allmänhet; med operationskategorien non-$\mathfrak{D}$ förstå vi ett icke-integrabelt differentialuttryck i allmänhet. Differentialuttrycket

$$x\delta y$$

i hvilket x är en variabel som är oberoende af y, hör till operationskategorien non-$\mathfrak{D}$; differentialuttrycket

$$y\delta x$$

hör likaledes till operationskategorien non-$\mathfrak{D}$; differentialuttrycket

$$x\delta y + y\delta x$$

som är summan af de begge föregående, hör däremot till operationskategorien $\mathfrak{D}$. Mellan operationskategorierna non-$\mathfrak{D}$ och $\mathfrak{D}$ kan finnas en öfvergång genom addition; operationskategorierna äro alltså möjliga tillsammans såsom ett matematiskt sammanhang. Möjligheten af ett inbördes sammanhang betyder för non-$\mathfrak{D}$ och $\mathfrak{D}$ att den motsats mot $\mathfrak{D}$ som non-$\mathfrak{D}$ uttalar icke är kontradiktorisk: motsats mellan sant och falskt, utan konträr: motsats mellan *enhetsoperationer* (lik motsatsen mellan reell enhet och imaginär enhet).

---

[1]) Anm. Vi förutsätta bekantskap med de första elementen inom variationskalkylen, inom teorien för system af lineära partiella differentialeqvationer af 1:a ordningen, inom teorien för partiella differentialeqvationer af 2:dra ordningen (den s. k. Mongeska metoden), dessutom bekantskap med begreppet: analytisk funktion af två oberoende variabler.

De begge differentialuttrycken $x\delta y$ och $y\delta x$, hvilka vi tagit ut ur kategorien non-$\mathfrak{D}$, kunna sägas afbilda kategorien non-$\mathfrak{D}$ i sig själfva till en viss grad: de äro ju två till antalet — alltså en kategori, en skara — och hvartdera uttrycket inses omedelbart tillhöra kategorien i fråga (vara ett icke-integrabelt differentialuttryck). Men de afbilda icke kategorien i fråga i hennes renhet; de utmärka icke bestämdt den kategoriens sammanhang med matematikens system. Kategorien $\mathfrak{D}$ — skaran af integrabla differentialuttryck — har ett bestämdt sammanhang med matematikens system, (att ett differentialuttryck är integrabelt betyder ju att det är *kändt* från ren matematisks synpunkt). Men sammanhanget mellan kategorierna non-$\mathfrak{D}$ och $\mathfrak{D}$ är ännu icke gifvet i dess adæqvata form. Det enda sammanhang mellan non-$\mathfrak{D}$ och $\mathfrak{D}$ som vi talat om är det specifikt additiva:

$$x\delta y + y\delta x$$

men enheterna non-$\mathfrak{D}$ och $\mathfrak{D}$ äro icke menade såsom omedelbara additionsenheter. Det specifikt additiva sammanhanget bär alltså prägeln af särskildhet, betraktadt såsom sammanhang mellan non-$\mathfrak{D}$ och $\mathfrak{D}$. Vi måste frångå särskildheten; vi måste gå till matematiskt bestämmande i allmänhet, om vi vilja ha sammanget mellan non-$\mathfrak{D}$ och $\mathfrak{D}$. Det allmännaste sammanhang som matematiken känner, är sammanhanget mellan eqvationerna i ett eqvationssystem. Differentialeqvationen

$$\delta y - y'\delta x = 0$$

må uttagas ur kategorien non-$\mathfrak{D}$. Differentialekvationen

$$\delta\omega - \omega'\delta\theta = 0$$

må uttagas ur samma kategori; tagas de begge eqvationerna tillsammans till ett system:

$$\delta y - y'\delta x = 0$$
$$\delta\omega - \omega'\delta\theta = 0$$

så är kategorien non-$\mathfrak{D}$ afbildad såsom matematisk allmänform eller i sin *hela form*. *Ett* vilkor måste dock förutskickas: man måste veta att de begge eqvationer som bilda systemet ha verklig betydelse för matematiken i deras hela sammanhang, åtminstone betydelse såsom ett erkändt problem. Kan det icke inses omedelbart att villkoret är uppfylldt, då föreställes icke kategorien non-

-$\mathfrak{D}$ själf i och genom systemet; stå systemets eqvationer helt främmande för hvarandra, då faller ju skaran af dem — själfva kategorien — sönder.

Monges system i allmänformen är af följande form:

$$R\delta y^2 - 2S\delta y\delta x + T\delta x^2 = 0$$
$$R\delta y\delta p + T\delta x\delta q = V\delta y\delta x$$
$$\delta z = p\delta x + q\delta y$$

Qvantiteterna R, S, T, V äro funktioner i allmänhet af variablerna x, y, z, p, q. Systemet i allmänformen har *ingen* integrabel kombination; det representerar alltså kategorien non-$\mathfrak{D}$. Kategorien non-$\mathfrak{D}$ inses vara omedelbart gifven genom detta system eller vara själfskrifven för detta, ty skaran af eqvationer håller i hop orubbligt jämväl för sådana fall, då ingen integrabel kombination finns (skaran af icke-integrabla Mongeska eqvationer kan ju föreställa ett problem inom variationskalkylen, en sådan fullt bestämd matematisk uppgift).

Ett problem som är gifvet inom matematiken har ock sin lösning inom matematiken. *Integration* af systemet är full lösning, för så vidt systemet kan fasthållas i allmänformen såsom ett differentialsystem. Men begreppen differentiation och variation sammanfalla icke (jmfr Cauchy, Cantor m. fl. Vi anvisa lösningen i en allmännare form; vi måste inrymma jämväl variationskalkylens problem. Med full lösning i allmänformen förstå vi öfvergången från operationskategorien non-$\mathfrak{D}$ själf till operationskategorien $\mathfrak{D}$ själf. I § 4 ha vi såsom utgångspunkt kategorien non-$\mathfrak{D}$ själf; vi ta nämligen för oss i den paragrafen ensamt *kategorien variation:* skaran af rena variationsproblem d. v. s. af sådana som icke ha någon integrabel kombination inom de tillhörande Mongeska karakteristikerna. Vi skola i samma paragraf anvisa lösningen eller operationskategorien $\mathfrak{D}$ själf; vi skola framlägga *kategorien reaktion* och visa om en reagens, att den *endels* är definierad med variationen (så att den är en verklig lösning af variationsproblemet), *endels* är en bestämning af väsentligt högre art än en tillhörande integralbestämning, hvilken som helst. I § 3 ha vi icke motsatsen mellan operationskategorierna non-$\mathfrak{D}$ och $\mathfrak{D}$ gifven fullt så skarp. Vi införa i paragrafen *kategorien involution;* vi skola uppvisa om reagenstypen att den har integraltypen inom sitt möjlighetsområde; vi skola finna reagen-

sen lika omedelbart gifven, lika självskrifven för det Mongeska systemet som en karakteristisk integral (en partikulär intermediär solution) hvilken som helst. I § 2 införa vi *kategorien integration*. Vi utgå här från den möjligheten att det Mongeska systemet är ett egentligt differentialsystem. Vi påstå att denna möjlighet är gifven åtminstone då, när karakteristikerna ha tillsammans fyra självständiga integrabla kombinationer χ

$$\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$$

Till stöd för vårt påstående anföra vi omedelbart den omständigheten att en funktion af två variabler lik den

$$z(x, y)$$

hvilken föreställes genom Monges system har sin analytiska determination eller sin allmänna bestämdhet just såsom funktion af fyra självständiga element. Såsom själfva integralkategorien $\mathfrak{D}$ skall framläggas i samma paragraf ett determineradt differentialsystem af 5 variabler x, y, z, p, q hvilket har just de 4 karakteristiska integralerna $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ såsom sina lösningar.

§ 2.

Det Mongeska systemet i kategorien integration.

Mom. 1. Vi ha af nöden att definiera en funktion iv_0. Vi vilja införa funktionen i fråga under en form så åskådlig som möjligt; vi välja för införandet af funktionen det symboliska betraktelsesätt som följer:

Vi införa operationskategorien $\mathfrak{R}$; den inrymmer fyra operationer $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$, $\mathfrak{R}_p$, $\mathfrak{R}_q$

$$\mathfrak{R}_x \equiv -\left(S_0 \frac{d}{dx} + T_0 \frac{d}{dy} + V_0 \frac{\partial}{\partial q}\right)$$

$$\mathfrak{R}_y \equiv R_0 \frac{d}{dx} + S_0 \frac{d}{dy} + V_0 \frac{\partial}{\partial p}$$

$$\mathfrak{R}_p \equiv -S_0 \frac{\partial}{\partial p} + R_0 \frac{\partial}{\partial q}$$

$$\mathfrak{R}_q \equiv -T_0 \frac{\partial}{\partial p} + S_0 \frac{\partial}{\partial q}$$

Uttrycken $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}$ symbolisera följande operationer:

$$\frac{d}{dx} \equiv \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{d}{dy} \equiv \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z}$$

Koefficienterna R_0, S_0, T_0, V_0 beteckna följande qvantiteter:

$$R_0 \equiv \frac{R}{\sqrt{S^2 - RT}} \qquad S_0 \equiv \frac{S}{\sqrt{S^2 - RT}} \qquad T_0 \equiv \frac{T}{\sqrt{S^2 - RT}}$$

$$V_0 \equiv \frac{V}{\sqrt{S^2 - RT}}$$

Qvantiteterna R, S, T, V äro de förut omtalade (de till det Mongeska problemets allmänform hörande).

Nu omkastas i operationskategorien $\mathfrak{R}$ ordningen mellan hvarje enkel operation och hans koefficient; operationerna bilda då derivator af koefficienterna. Operationskategorien $\mathfrak{R}$ har alltså ersatts genom derivationskategorien $(\mathfrak{R})_0$:

$$(\mathfrak{R}_x)_0 \equiv -\left(\frac{dS_0}{dx} + \frac{dT_0}{dy} + \frac{\partial V_0}{\partial q}\right)$$

$$(\mathfrak{R}_y)_0 \equiv \frac{dR_0}{dx} + \frac{dS_0}{dy} + \frac{\partial V_0}{\partial p}$$

$$(\mathfrak{R}_p)_0 \equiv -\frac{\partial S_0}{\partial p} + \frac{\partial R_0}{\partial q}$$

$$(\mathfrak{R}_q)_0 \equiv -\frac{\partial T_0}{\partial p} + \frac{\partial S_0}{\partial q}$$

Derivationsresultaten $(\mathfrak{R}_x)_0$, $(\mathfrak{R}_y)_0$, $(\mathfrak{R}_p)_0$, $(\mathfrak{R}_q)_0$ bestämmas i ordning såsom de partiella derivatorna $\frac{du_0}{dx}, \frac{du_0}{dy}, \frac{\partial u_0}{\partial p}, \frac{\partial u_0}{\partial q}$ af en och samma funktion u_0:

$$\frac{du_0}{dx} \equiv (\mathfrak{R}_x)_0$$

$$\frac{du_0}{dy} \equiv (\mathfrak{R}_y)_0$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial p} \equiv (\mathfrak{R}_p)_0$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial q} \equiv (\mathfrak{R}_q)_0$$

Vi låta nu alla operationer som ingå i operationskategorien $\mathfrak{R}$ operera på en och samma funktion u_0; vi erhålla då följande operationsresultat:

$$\mathfrak{R}_x u_0 \equiv -\left(S_0 \frac{d}{dx} + T_0 \frac{d}{dy} + V_0 \frac{\partial}{\partial q}\right) u_0 \equiv -\left(S_0 \frac{du_0}{dx} + \right.$$

$$\left. + T_0 \frac{du_0}{dy_0} + V_0 \frac{\partial u_0}{\partial q}\right)$$

$$\mathfrak{R}_y u_0 \equiv \left(R_0 \frac{d}{dx} + S_0 \frac{d}{dy} + V_0 \frac{\partial}{\partial p}\right) u_0 \equiv R_0 \frac{du_0}{dx} + S_0 \frac{du_0}{dy} + V_0 \frac{\partial u_0}{\partial p}$$

$$\mathfrak{R}_p u_0 \equiv \left(-S_0 \frac{\partial}{\partial p} + R_0 \frac{\partial}{\partial q}\right) u_0 \equiv -S_0 \frac{\partial u_0}{\partial p} + R_0 \frac{\partial u_0}{\partial q}$$

$$\mathfrak{R}_q u_0 \equiv \left(-T_0 \frac{\partial}{\partial p} + S_0 \frac{\partial}{\partial q}\right) u_0 \equiv -T_0 \frac{\partial u_0}{\partial p} + S_0 \frac{\partial u_0}{\partial q}$$

Vi omskrifva operationsresultaten $\mathfrak{R}_x u_0$, $\mathfrak{R}_y u_0$, $\mathfrak{R}_p u_0$, $\mathfrak{R}_q u_0$ sedan vi infört i stället för $\frac{du_0}{dx}$, $\frac{du_0}{dy}$, $\frac{\partial u_0}{\partial p}$, $\frac{\partial u_0}{\partial q}$ de likabetydande $(\mathfrak{R}_x)_0$, $(\mathfrak{R}_y)_0$, $(\mathfrak{R}_p)_0$ $(\mathfrak{R}_q)_0$:

$$\mathfrak{R}_x u_0 \equiv -\left[S_0(\mathfrak{R}_x)_0 + T_0(\mathfrak{R}_y)_0 + V_0(\mathfrak{R}_q)_0\right]$$

$$\mathfrak{R}_y u_0 \equiv R_0(\mathfrak{R}_x)_0 + S_0(\mathfrak{R}_y)_0 + V_0(\mathfrak{R}_p)_0$$

$$\mathfrak{R}_p u_0 \equiv -S_0(\mathfrak{R}_p)_0 + R_0(\mathfrak{R}_q)_0$$

$$\mathfrak{R}_q u_0 \equiv -T_0(\mathfrak{R}_p)_0 + S_0(\mathfrak{R}_q)_0$$

Derivationsresultaten $\mathfrak{R}_x u_0$, $\mathfrak{R}_y u_0$, $\mathfrak{R}_p u_0$, $\mathfrak{R}_q u_0$ bestämmas i ordning såsom de partiella derivatorna $\frac{div_0}{dx}$, $\frac{div_0}{dy}$, $\frac{\partial iv_0}{\partial p}$, $\frac{\partial iv_0}{\partial q}$ af en funktion iv_0:

$$\frac{div_0}{dx} \equiv -\left[S_0(\mathfrak{R}_x)_0 + T_0(\mathfrak{R}_y)_0 + V_0(\mathfrak{R}_q)_0\right]$$

$$\frac{div_0}{dy} \equiv R_0(\mathfrak{R}_x)_0 + S_0(\mathfrak{R}_y)_0 + V_0(\mathfrak{R}_p)_0$$

$$\frac{\partial iv_0}{\partial p} \equiv - S_0(\mathfrak{R}_p)_0 + R_0(\mathfrak{R}_q)_0$$

$$\frac{\partial iv_0}{\partial q} \equiv - T_0(\mathfrak{R}_p)_0 + S_0(\mathfrak{R}_q)_0$$

Mom. 2. Vi beteckna med symbolen $\jmath_\varphi$ en operation af följande form:

$$\jmath_\varphi \equiv \frac{d\varphi}{dx}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{d}{dx} - \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{d}{dy}$$

Vi benämna den operationen: *operationen* $\jmath$ *af funktionen* φ. Funktionen φ som ingår i operationen är funktion af operationsvariablerna x, y, z, p, q. Vi förstå med symbolen $\jmath^{\psi}_{\varphi}$ det operationsresultat som erhålles, då operationen $\jmath_\varphi$ får verka på en funktion ψ

$$\jmath^{\psi}_{\varphi} \equiv \left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{d}{dx} - \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{d}{dy}\right)\psi \equiv$$

$$\equiv \frac{d\varphi}{dx}\frac{\partial\psi}{\partial p} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{\partial\psi}{\partial q} - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{d\psi}{dx} - \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{d\psi}{dy}$$

Vi benämna symbolen $\jmath^{\psi}_{\varphi}$ *den jacobiska operationen* $\jmath$ *af funktionen* φ *på funktionen* ψ. Vi antaga att φ och ψ permuteras i uttrycket:

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{\partial\psi}{\partial p} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{\partial\psi}{\partial q} - \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{d\psi}{dx} - \frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{d\psi}{dy}$$

då kastar uttrycket om sitt förtecken, men förblifver i öfrigt oförändradt; alltså gäller relationen:

$$\jmath^{\psi}_{\varphi} \equiv - \jmath^{\varphi}_{\psi}$$

relationens mening är den följande: den jacobiska operationen $\jmath$ *af* funktionen φ *på* funktionen ψ är lika med den jacobiska operationen $\jmath$ *af* funktionen ψ *på* funktionen φ med ombytt tecken.

Vi beteckna med symbolen non-$\jmath_{iv_0}$ en operation af följande form:

$$\text{non-}\jmath_{iv_0} \equiv 2\frac{\partial}{\partial z} + \jmath_{iv_0}$$

Funktionen iv_0 som ingår i symbolen är den funktion som definierats ofvan (Mom. 1.). Vi benämna symbolen non-$\jmath_{iv_0}$ *den ja-*

cobiska operationen non-ʒ af funktionen iv_0. Vi låta operationen non-$ʒ_{iv_0}$ verka på en funktion χ och vi antaga att operationsresultatet försvinner:

$$\text{non-}ʒ_{iv_0}\chi \equiv 0$$

vi vilja härnäst uppsöka möjlighetsområdet för funktionen χ m. a. o. vi vilja bestämma antalet självständiga partikulära lösningar till differentialeqvationen

$$\text{non-}ʒ_{iv_0}\chi = 0$$

Differentialeqvationen i fråga kan skrifvas under följande form:

$$\frac{div_0}{dx}\frac{\partial\chi}{\partial p} + \frac{div_0}{dy}\frac{\partial\chi}{\partial q} - \frac{\partial iv_0}{\partial p}\frac{\partial\chi}{\partial x} - \frac{\partial iv_0}{\partial q}\frac{\partial\chi}{\partial y} +$$
$$+\left[2 - p\frac{\partial iv_0}{\partial p} - q\frac{\partial iv_0}{\partial q}\right]\frac{\partial\chi}{\partial z} = 0$$

Ofvanstående form är en homogen lineär partiell differentialeqvation af 1:sta ordningen innehållande fem oberoende variabler. Den representerar såsom bekant en skara af vanliga differentialeqvationer af 1:sta ordningen, *fyra* till antalet. Denna skara bildar ett determineradt eller fullständigt integrabelt system; ur densamma erhållas fyra självständiga partikulära lösningar

$$\chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3,\ \chi_4$$

Dessa fyra lösningar utgöra möjlighetsområdet för funktionen χ; vi benämna dem integralkategorien. Vi uttala nu följande påstående:

Det **determinerade** *differentialsystemet non-*$ʒ_{iv_0} = 0$ *ersätter Monges system, det* **icke-determinerade** *system som är gifvet, med sin* **hela** *integralskara, för så vidt det Mongeska systematiska bestämmandet öfver hufvud inrymmer fyra integrabla kombinationer.*

Vi måste ge någon sorts bevisning åt vårt påstående. Vi ämna bevisa påståendet därigenom att vi uppvisa giltigheten af det för några skarpt åtskilda fall; vi nödgas inskränka oss till den sortens bevisning.

Mom. 3. Ex. 1. $z(r-t) = p^2 - q^2$

Forsyth.

Ofvanstående eqvation föreställer ett Monges system af formen:

$$\delta y^2 - \delta x^2 = 0$$

$$\delta y \delta p - \delta x \delta q = \frac{p^2 - q^2}{z} \delta y \delta x$$

$$\delta z = p \delta x + q \delta y$$

Systemet har fyra karakteristiska integraler χ_1, χ_2, χ_3, χ_4

$$\chi_1 \equiv x - y \qquad \chi_3 \equiv x + y$$

$$\chi_2 \equiv \frac{p - q}{z} \qquad \chi_4 \equiv \frac{p + q}{z}$$

Vi ha nu att bilda operationen non-η_{iv_0}. Först bildas (§ 1) qvantiteterna R, S, T, V

$$R \equiv 1 \qquad S \equiv 0 \qquad T \equiv -1 \qquad V \equiv \frac{p^2 - q^2}{z}$$

härpå bildas (§ 2 mom. 1) qvantiterna R_0, S_0, T_0, V_0

$$R_0 \equiv 1 \qquad S_0 \equiv 0 \qquad T_0 \equiv -1 \qquad V_0 \equiv \frac{p^2 - q^2}{z}$$

Vidare bildas operationskategorien $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R}_x \equiv -\left[(-1) \cdot \frac{d}{dy} + \frac{p^2 - q^2}{z} \cdot \frac{\partial}{\partial q}\right]$$

$$\mathfrak{R}_y \equiv 1 \cdot \frac{d}{dx} + \frac{p^2 - q^2}{z} \cdot \frac{\partial}{\partial p}$$

$$\mathfrak{R}_p \equiv 1 \cdot \frac{\partial}{\partial q}$$

$$\mathfrak{R}_q \equiv 1 \cdot \frac{\partial}{\partial p}$$

Härefter följer derivationskategorien $(\mathfrak{R})_0$:

$$(\mathfrak{R}_x)_0 \equiv \frac{2q}{z}$$

$$(\mathfrak{R}_y)_0 \equiv \frac{2p}{z}$$

$$(\mathfrak{R}_p)_0 \equiv 0$$

$$(\mathfrak{R}_q)_0 \equiv 0$$

härpå bildas derivatorna af funktionen iv_0

$$\frac{div_0}{dx} \equiv \frac{2p}{z} \qquad \frac{div_0}{dy} \equiv \frac{2q}{z} \qquad \frac{\partial iv_0}{\partial p} \equiv 0 \qquad \frac{\partial iv_0}{\partial q} \equiv 0$$

Ytterligare bildas (§ 2 mom. 2) den jakobiska operationen $\urcorner$ af funktionen iv_0:

$$\urcorner_{iv_0} \equiv \frac{2p}{z}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{2q}{z}\frac{\partial}{\partial q}$$

Slutligen bildas den jacobiska operationen non-$\urcorner$ af iv_0:

$$\text{non-}\urcorner_{iv_0} \equiv 2\frac{\partial}{\partial z} + \urcorner_{iv_0} \equiv 2\frac{\partial}{\partial z} + \frac{2p}{z}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{2q}{z}\frac{\partial}{\partial q} \equiv \frac{2}{z}\left(z\frac{\partial}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + p\frac{\partial}{\partial p} + q\frac{\partial}{\partial q}\right).$$

Operationen non-$\urcorner_{iv_0}$ definierar hela integralskaran, ty operationsresultatet:

$$\left(z\frac{\partial}{\partial z} + p\frac{\partial}{\partial p} + q\frac{\partial}{\partial q}\right)\chi$$

försvinner, då χ införes såsom en af de gifna karakteristiska integralerna:

$$x - y \qquad \frac{p-q}{z} \qquad x + y \qquad \frac{p+q}{z}$$

hvilken som helst. Teoremet gäller alltså beträffande eqvationen $z(r-t) = p^2 - q^2$.

Ex. 2. $\qquad x^2 r - y^2 t = xp - yq + xy$

Forsyth

Det Mongeska systemet:

$$x^2\delta y^2 - y^2\delta x^2 = 0$$

$$x^2\delta y\delta p - y^2\delta x\delta q = (xp - yq + xy)\,\delta y\delta x$$

$$\delta z = p\delta x + q\delta y$$

De fyra intermediära solutionerna χ

$$xy \qquad \frac{xp - yq - xy\log x}{x^2} \qquad \frac{y}{x} \qquad xp + yq - 2z - xy\log x$$

$$R \equiv x^2 \qquad S \equiv 0 \qquad T \equiv -y^2 \qquad V \equiv xp - yq + xy$$

$$R_0 \equiv \frac{x}{y} \qquad S_0 \equiv 0 \qquad T_0 \equiv -\frac{y}{x} \qquad V_0 \equiv \frac{p}{y} - \frac{q}{x} + 1$$

Operationskategorien $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R}_x \equiv -\left[\left(-\frac{y}{x}\right)\frac{d}{dy} + \left(\frac{p}{y} - \frac{q}{x} + 1\right)\frac{\partial}{\partial q}\right]$$

$$\mathfrak{R}_y \equiv \frac{x}{y}\frac{d}{dx} + \left(\frac{p}{y} - \frac{q}{x} + 1\right)\frac{\partial}{\partial p}$$

$$\mathfrak{R}_p \equiv \frac{x}{y}\frac{\partial}{\partial q}$$

$$\mathfrak{R}_q \equiv \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial p}$$

Derivationskategorien $(\mathfrak{R})_0$:

$$(\mathfrak{R}_x)_0 \equiv \frac{2}{x} \quad (\mathfrak{R}_y)_0 \equiv \frac{2}{y} \quad (\mathfrak{R}_p)_0 \equiv 0 \quad (\mathfrak{R}_q)_0 \equiv 0$$

Derivatorna af funktionen iv_0:

$$\frac{div_0}{dx} \equiv \frac{2}{x} \quad \frac{div_0}{dy} \equiv \frac{2}{y} \quad \frac{\partial iv_0}{\partial p} \equiv 0 \quad \frac{\partial iv_0}{\partial q} \equiv 0$$

Den jakobiska operationen $\urcorner$ af funktionen iv_0:

$$\urcorner_{iv_0} \equiv \frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{2}{y}\frac{\partial}{\partial q}$$

Den jacobiska operationen non-$\urcorner$ af funktionen iv_0:

$$\text{non-}\urcorner_{iv_0} \equiv 2\frac{\partial}{\partial z} + \urcorner_{iv_0} \equiv 2\frac{\partial}{\partial z} + \frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{2}{y}\frac{\partial}{\partial q} \equiv \frac{2}{xy}\left[xy\frac{\partial}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + y\frac{\partial}{\partial p} + x\frac{\partial}{\partial q}\right]$$

Operationen non-$\urcorner_{iv_0}$ definierar hela integralskaran, ty operationsresultatet:

$$\left(xy\frac{\partial}{\partial z} + y\frac{\partial}{\partial p} + x\frac{\partial}{\partial q}\right)\chi$$

försvinner, då χ införes såsom en, hvilken som helst, af de omedelbart gifna intermediära solutionerna $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$. Teoremet gäller för eqvationen $x^2r - y^2t = xp - yq + xy$

Ex. 3. $q(1+q)r - (p+q+2pq)s + p(1+p)t = 0$

Boole.

Det tillhörande Mongeska systemet:

$$q(1+q)\delta y^2 + (p+q+2pq)\delta y\delta x + p(1+p)\delta x^2 = 0$$

$$q(1+q)\delta y\delta p + p(1+p)\delta x\delta q = 0$$

$$\delta z = p\delta x + q\delta y$$

$$\chi_1 \equiv z \quad \chi_2 \equiv \frac{1+q}{1+p} \quad \chi_3 \equiv x+y+z \quad \chi_4 \equiv \frac{q}{p}$$

$$R \equiv q(1+q) \quad S \equiv -\frac{p+q+2pq}{2} \quad T \equiv p(1+p) \quad V \equiv 0$$

$$R_0 \equiv \frac{2q(1+q)}{p-q} \quad S_0 \equiv -\frac{p+q+2pq}{p-q} \quad T_0 \equiv \frac{2p(1+p)}{p-q} \quad V_0 \equiv 0$$

Operationskategorien $\mathfrak{K}$:

$$\mathfrak{K}_x \equiv -\left[-\frac{p+q+2pq}{p-q}\frac{d}{dx} + \frac{2p(1+p)}{p-q}\frac{d}{dy}\right]$$

$$\mathfrak{K}_y \equiv \frac{2q(1+q)}{p-q}\frac{d}{dx} - \frac{p+q+2pq}{p-q}\frac{d}{dy}$$

$$\mathfrak{K}_p \equiv \frac{p+q+2pq}{p-q}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{2q(1+q)}{p-q}\frac{\partial}{\partial q}$$

$$\mathfrak{K}_q \equiv -\frac{2p(1+p)}{p-q}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{p+q+2pq}{p-q}\frac{\partial}{\partial q}$$

Derivationskategorien $(\mathfrak{K})_0$:

$$(\mathfrak{K}_x)_0 \equiv 0 \qquad (\mathfrak{K}_y)_0 \equiv 0$$

$$(\mathfrak{K}_p)_0 \equiv \frac{2(1+2q)}{p-q} \qquad (\mathfrak{K}_q)_0 \equiv -\frac{2(1+2p)}{p-q}$$

Derivatorna af funktionen iv_0:

$$\frac{div_0}{dx} \equiv 0 \quad \frac{div_0}{dy} \equiv 0 \quad \frac{\partial iv_0}{\partial p} \equiv \frac{2}{p-q} \quad \frac{\partial iv_0}{\partial q} \equiv -\frac{2}{p-q}$$

Den jacobiska operationen $\jmath$ af funktionen iv_0:

$$\jmath_{iv_0} \equiv -\frac{2}{p-q}\frac{d}{dx} + \frac{2}{p-q}\frac{d}{dy}$$

Den jacobiska operationen non-$\jmath$ af funktionen iv_0:

$$\text{non-}\jmath_{iv_0} \equiv 2\frac{\partial}{\partial z} + \jmath_{iv_0} \equiv 2\frac{\partial}{\partial z} - \frac{2}{p-q}\frac{d}{dx} + \frac{2}{p-q}\frac{d}{dy} \equiv$$

$$\equiv -\frac{2}{p-q}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Operationen non-$\jmath_{iv_0}$ definierar hela integralkategorien, ty operationsresultatet:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\chi$$

försvinner, då i stället för χ införes hvilken som helst af de gifna intermediära solutionerna χ. Teoremet gäller för equationen $q(1+q)r-(p+q+2pq)s+p(1+p)t=0$

Ex. 4. $$(1+q^2)s-pqt=0$$

Goursat.

Det Mongeska systemet:

$$(1+q^2)\,\delta y\delta x+pq\delta x^2=0$$

$$pq\delta x\delta q=0$$

$$\delta z=p\delta x+q\delta y$$

$$\chi_1\equiv x \quad \chi_2\equiv\frac{p^2}{1+q^2} \quad \chi_3\equiv q \quad \chi_4\equiv y+qz$$

$$R\equiv 0 \quad S\equiv-\frac{1+q^2}{2} \quad T\equiv pq \quad V\equiv 0$$

$$R_0\equiv 0 \quad S_0\equiv 1 \quad T_0\equiv-\frac{2pq}{1+q^2} \quad V_0\equiv 0$$

Operationskategorien $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R}_x\equiv-\left[1\cdot\frac{d}{dx}-\frac{2pq}{1+q^2}\cdot\frac{d}{dy}\right]$$

$$\mathfrak{R}_y\equiv 1\cdot\frac{d}{dy}$$

$$\mathfrak{R}_p\equiv-1\cdot\frac{\partial}{\partial p}$$

$$\mathfrak{R}_q\equiv\frac{2pq}{1+q^2}\frac{\partial}{\partial p}+1\cdot\frac{\partial}{\partial q}$$

Derivationskategorien $(\mathfrak{R})_0$:

$$(\mathfrak{R}_x)_0\equiv 0 \quad (\mathfrak{R}_y)_0\equiv 0 \quad (\mathfrak{R}_p)_0\equiv 0 \quad (\mathfrak{R}_q)_0\equiv\frac{2q}{1+q^2}$$

Derivatorna af funktionen iv_0:

$$\frac{div_0}{dx}\equiv 0 \quad \frac{div_0}{dy}\equiv 0 \quad \frac{\partial iv_0}{\partial p}\equiv 0 \quad \frac{\partial iv_0}{\partial q}\equiv\frac{2q}{1+q^2}$$

Den jacobiska operationen $\jmath$ af funktionen iv_0:

$$\jmath_{iv_0}\equiv-\frac{2q}{1+q^2}\frac{d}{dy}$$

Den jacobiska operationen non-$\jmath$ af funktionen iv_0:

$$\text{non-}\jmath_{iv_0} \equiv 2\frac{\partial}{\partial z} + \jmath_{iv_0} \equiv 2\frac{\partial}{\partial z} - \frac{2q}{1+q^2}\frac{d}{dy} \equiv \frac{2}{1+q^2}\left(\frac{\partial}{\partial z} - q\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Operationen non-$\jmath_{iv_0}$ definierar hela integralkategorien, ty operationsresultatet:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - q\frac{\partial}{\partial y}\right)\chi$$

försvinner, då i stället för χ införes en, hvilken som helst, af de omedelbart gifna intermediära solutionerna

$$\chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3,\ \chi_4$$

Teoremet gäller för eqvationen $(1+q^2)s - pqt = 0$.

§ 3.

Det Mongeska systemet i kategorien involution.

Mom. 1. Vi skola fixera de Mongeska motsatserna $\mathfrak{D}$ och non-$\mathfrak{D}$ i deras omedelbart gifna form.

Monges system utgår som bekant med tvänne *alternativa* system: karakteristikerna M_1 och M_2

$$\left.\begin{array}{c} \delta y = m_1\delta x \\ Rm_1\delta p + T\delta q = Vm_1\delta x \\ \delta z = (p + qm_1)\,\delta x \\ Rm_1^2 - 2Sm_1 + T \equiv 0 \end{array}\right\} M_1 \qquad \left.\begin{array}{c} \delta y = m_2\delta x \\ Rm_2\delta p + T\delta q = Vm_2\delta x \\ \delta z = (p + qm_2)\,\delta x \\ Rm_2^2 - 2Sm_2 + T \equiv 0 \end{array}\right\} M_2$$

Det Mongeska systemet är således *antingen* systemet M_1 *eller* systemet M_2. Karakteristikan M_1 kan ha *två* integrabla kombinationer, u_1 och u_2, under det att karakteristiken M_2 har *ingen*, det är en möjlighet som kan komma i fråga. Antages den möjligheten gifven, så är det Mongeska problemet (det *antingen — eller* som föreligger) intet verkligt problem; systemet M_1 som har systemet af integraler (skaran u_1 u_2) är den bestämda operationskategorien $\mathfrak{D}$; systemet M_2 som saknar integraler för sin skara af differentialeqvationer är den obestämda operationskategorien non-$\mathfrak{D}$. Andra möjligheter kunna finnas bredvid den nämda; vi

utmärka skaran af möjligheter — de karakteristiska fallen — genom symbolerna:

$$\mathrm{M}_{v_1\ v_2}^{u_1\ u_2}\Big] \quad \mathrm{M}_{v_1\ o}^{u_1\ u_2}\Big] \quad \mathrm{M}_{o\ o}^{u_1\ u_2}\Big] \quad \mathrm{M}_{v_1\ o}^{u_1\ o}\Big] \quad \mathrm{M}_{o\ o}^{u_1\ o}\Big] \quad \mathrm{M}_{o\ o}^{o\ o}\Big]$$

Symbolen $\mathrm{M}_{v_1\ v_2}^{u_1\ u_2}\Big]$ utmärker att karakt:n M_1 har *två* integraler och att karakt:n M_2 har *två*

» $\mathrm{M}_{v_1\ o}^{u_1\ u_2}\Big]$ utmärker att karakt:n M_1 har *två* integraler och att karakt:n M_2 har *en*

» $\mathrm{M}_{o\ o}^{u_1\ u_2}\Big]$ utmärker att karakt:n M_1 har *två* integraler och att karakt:n M_2 har *ingen.*

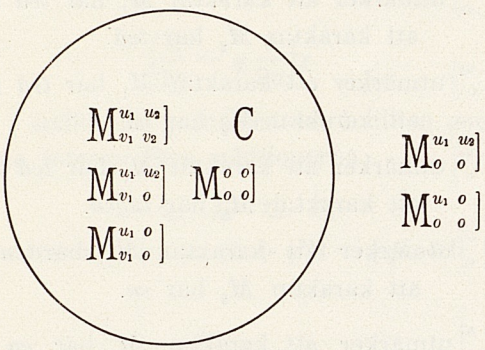
» $\mathrm{M}_{v_1\ o}^{u_1\ o}\Big]$ utmärker att karakt:n M_1 har *en* integral och att karakt:n M_2 har *en.*

» $\mathrm{M}_{o\ o}^{u_1\ o}\Big]$ utmärker att karakt:n M_1 har *en* integral och att karakt:n M_2 har *ingen*

» $\mathrm{M}_{o\ o}^{o\ o}\Big]$ utmärker att karakt:n M_1 har *ingen* integral och att karakt:n M_2 har *ingen*

Bredvid det karakteristiska fall vi nyss betraktat — fallet $\mathrm{M}_{o\ o}^{u_1\ u_2}\Big]$ — sätta vi omedelbart fallet $\mathrm{M}_{o\ o}^{u_1\ o}\Big]$. Ty äfven här är motsatsen mellan karakteristikor så skarp som motsatsen mellan integral och icke-integral; visserligen är motsatsen mellan integral och icke-integral icke utförd såsom systematisk motsats (det finns ju ingen *skara* af integraler, bara *en enda* integral), men *om* en systematisk eller allmän motsats har någon betydelse får fallet i fråga, så måste det vara karakteristikernas egen motsats; att gå till en högre systematisk motsats är icke af nöden. Härnäst ta vi i betraktande fallet $\mathrm{M}_{v_1\ v_2}^{u_1\ u_2}\Big]$. Valet mellan alternativ är ett verkligt problem, då det fallet föreligger, ty den gifna systematiska motsatsen — motsatsen mellan karakteristikor — är icke i sig själf motsatsen mellan bestämd operationskategori ($\mathfrak{D}$) och obestämd (non-$\mathfrak{D}$). Hvardera karakteristikan faller inom kategorien $\mathfrak{D}$, för så vidt karakteristikan kan betraktas såsom eqvivalent med sin faktiskt befintliga integralskara. Hvardera karakteristikan faller inom kategorien non-$\mathfrak{D}$ för så vidt den alltjämt kan betraktas såsom ett indetermineradt differentialsystem (tre eqvationer inne-

hållande fem variabler). Här är en högre systematisk motsats påkallad; vi ha infört den systematiska operation non-$\mathfrak{I}_{iv_0}$ såsom möjlig enhet i den motsatsen. Vi inrymma för åskådlighetens skull de karakteristiska fallen $\mathrm{M}_{o\ o}^{u_1\ u_2}]$, $\mathrm{M}_{o\ o}^{u_1\ o}]$ *utom* en cirkel C och vi förlägga alla öfriga karakteristiska fall *inom* cirkeln.



Den omedelbara Mongeska systematiska operationen — motsatsen mellan karakteristikor — är möjlig såväl *inom* som *utom* cirkeln (det finns ju karakteristiska fall såväl *inom* som *utom*); men den systematiska operationen non-$\mathfrak{I}_{iv_0}$, hvilken kommer före såsom *högre* enhet, är möjlig allenast *inom* cirkeln. Ty *utom* cirkeln är ju den omedelbara Mongeska operationen icke blott *möjlig* enhet, utan *fullt bestämd* enhet eller omedelbar lösning. Det Mongeska problemet just såsom *problem* (icke-lösning) är då *inom* cirkeln, icke *utom*. En sträng enhet syftar på det problem som finns och på något annat syftar den icke. Enhetsoperationen non-$\mathfrak{I}_{iv_0}$ hvilken ligger före såsom möjlig lösning vid Monges problem syftar alltså rätteligen *inom* cirkeln. Vi skola uppvisa genom ett exempel att den icke syftar utom cirkeln.

Ex. 5. $$q^2r - p^2t = xq$$

Det Mongeska systemet:

$$q^2\delta y^2 - p^2\delta x^2 = 0 \quad q^2\delta y\delta p - p^2\delta x\delta q = xq\delta y\delta x \quad \delta z = p\delta x + q\delta y$$

Två karakteristiska integraler finnas, begge tillhörande samma karakteristika:

$$u_1 = z \qquad u_2 = pq - \frac{1}{2}x^2$$

Vårt exempel tillhör tydligen det karakteristiska fallet $\mathrm{M}_{o\ o}^{u_1\ u_2}]$; det faller alltså *utom* cirkeln C.

$$R \equiv q^2 \qquad S \equiv 0 \qquad T \equiv -p^2 \qquad V \equiv xq$$

$$R_0 \equiv \frac{q}{p} \qquad S_0 \equiv 0 \qquad T_0 \equiv -\frac{p}{q} \qquad V_0 \equiv \frac{x}{p}$$

Operationskategorien $\mathfrak{K}$:

$$\mathfrak{K}_x \equiv -\left[\left(-\frac{p}{q}\right)\frac{d}{dy} + \frac{x}{p}\frac{\partial}{\partial q}\right]; \qquad \mathfrak{K}_y \equiv \frac{q}{p}\frac{d}{dx} + \frac{x}{p}\frac{\partial}{\partial p};$$

$$\mathfrak{K}_p \equiv \frac{q}{p}\frac{\partial}{\partial q}; \qquad \mathfrak{K}_q \equiv \frac{p}{q}\frac{\partial}{\partial p}$$

Derivationskategorien $(\mathfrak{K})_0$:

$$(\mathfrak{K}_x)_0 \equiv 0 \qquad (\mathfrak{K}_y)_0 \equiv -\frac{x}{p^2} \qquad (\mathfrak{K}_p)_0 \equiv \frac{1}{p} \qquad (\mathfrak{K}_q)_0 \equiv \frac{1}{q}$$

Derivatorna af funktionen iv_0:

$$\frac{div_0}{dx} \equiv -\frac{2x}{pq} \qquad \frac{div_0}{dy} = 0 \qquad \frac{\partial iv_0}{\partial p} \equiv \frac{1}{p} \qquad \frac{\partial iv_0}{\partial q} \equiv \frac{1}{q}$$

Operationen non-$\mathfrak{I}_{iv_0}$:

$$\text{non-}\mathfrak{I}_{iv_0} \equiv -\frac{1}{pq}\left[q\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial p}\right]$$

Resultatet af operationen non-$\mathfrak{I}_{iv_0}$ på den karakteristiska integralen $pq - \frac{1}{2}x^2$ är *icke* noll. Exemplet visar att operationen non-$\mathfrak{I}_{iv_0}$ syftar bort från fallet $\mathrm{M}_{o\ o}^{u_1\ u_2}\Big]$.

Operationen non-$\mathfrak{I}_{iv_0}$ inses vara möjlig *i det hela* för så vidt den kan visas upptaga det Mongeska problemet inom hela cirkeln C m. a. o. i alla sådana fall, då det Mongeska systematiska bestämmandet är ett verkligt problem.

Vi säga att operationen non-$\mathfrak{I}_{iv_0}$ behåller sin möjlighet för de karakteristiska fallen $\mathrm{M}_{v_1\ o}^{u_1\ u_2}\Big]$ och $\mathrm{M}_{v_1\ o}^{u_1\ o}\Big]$ för så vidt operationsresultatet försvinner då operationen non-$\mathfrak{I}_{iv_0}$ utföres på en karakteristisk integral, hvilken som helst af de gifna, vare sig de äro tre till antalet såsom $u_1\ u_2\ v_1$ eller två till antalet såsom $u_1\ v_1$. Vi vilja anföra tvänne exempel till att belysa operationens non-$\mathfrak{I}_{iv}$ möjlighet för de tvänne nämda karakteristiska fallen.

Ex. 6. $\qquad x^2r - y^2t = (px + qy - z)^2$

Forsyth.

Det Mongeska systemet:

$$x^2\delta y^2 - y^2\delta x^2 = 0 \qquad x^2\delta y\delta p - y^2\delta x\delta q = (px + qy - z)^2\delta y\delta x$$

$$\delta z = p\delta x + q\delta y$$

Trenne karakteristiska integraler finnas:

$$u_1 = xy \qquad u_2 = ye^{-\frac{1}{px+qy-z}} \qquad v_1 = \frac{y}{x}$$

Exemplet tillhör alltså det karakteristiska fallet $\mathrm{M}^{u_1\ u_2}_{v_1\ o}]$

$$R \equiv x^2 \qquad S \equiv 0 \qquad T \equiv -y^2 \qquad V \equiv (px + qy - z)^2$$

$$R_0 \equiv \frac{x}{y} \qquad S_0 \equiv 0 \qquad T_0 \equiv -\frac{y}{x} \qquad V_0 \equiv \frac{(px + qy - z)^2}{xy}$$

Operationskategorien $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R}_x \equiv -\left[\left(-\frac{y}{x}\right)\frac{d}{dy} + \frac{(px + qy - z)^2}{xy}\frac{\partial}{\partial q}\right];$$

$$\mathfrak{R}_y \equiv \frac{x}{y}\frac{d}{dx} + \frac{(px + qy - z)^2}{xy}\frac{\partial}{\partial p}; \quad \mathfrak{R}_p \equiv \frac{x}{y}\frac{\partial}{\partial q}; \quad \mathfrak{R}_q \equiv \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial p}$$

Derivationskategorien $(\mathfrak{R}_0)$:

$$(\mathfrak{R}_x)_0 \equiv \frac{1}{x} - \frac{2(px + qy - z)}{x}; \quad (\mathfrak{R}_y)_0 \equiv \frac{1}{y} + \frac{2(px+qy-z)}{y};$$

$$(\mathfrak{R}_p)_0 \equiv (\mathfrak{R}_q)_0 \equiv 0$$

Derivatorna af funktionen iv_0:

$$\frac{div_0}{dx} \equiv \frac{1}{x} + \frac{2(px + qy - z)}{x}; \quad \frac{div_0}{dy} \equiv \frac{1}{y} - \frac{2(px + qy - z)}{y};$$

$$\frac{\partial iv_0}{\partial p} \equiv \frac{\partial iv_0}{\partial q} \equiv 0$$

Operationen non-$\mathfrak{I}_{iv_0}$:

$$\text{non-}\mathfrak{I}_{iv_0} \equiv 2\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial q} + 2(px + qy - z)\left[\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial q}\right]$$

Operationsresultatet non-$\mathfrak{I}_{iv_0}\chi$ är noll, då χ är någon af de karakteristiska integralerna u_1 u_2 v_1 hvilken som helst. Operationen non-$\mathfrak{I}_{iv_0}$ är alltså möjlig för fallet $\mathrm{M}^{u_1\ u_2}_{v_1\ o}]$.

Ex. 7.

$$x^2 r + 2x^2 s + \left(x^2 - \frac{b^2}{x^2 q^2}\right) t = 2z$$

Imschenetsky

Det Mongeska systemet:

$$x^2\,\delta y^2 - 2x^2\,\delta y\,\delta x + \left(x^2 - \frac{b^2}{x^2 q^2}\right)\delta x^2 = 0$$

$$x^2 \delta y\,\delta p + \left(x^2 - \frac{b^2}{x^2 q^2}\right)\delta x\,\delta q = 2z\,\delta y\,\delta x$$

$$\delta z = p\delta x + q\delta y$$

Tvänne karakteristiska integraler finnas, en för hvardera karakteristiken:

$$u_1 = x^2(p + q) - 2xz - b\log q + 2b\log x$$

$$v_1 = x^2(p + q) - 2xz + b\log q - 2b\log x$$

Exemplet tillhör alltså det karakteristiska fallet $\mathrm{M}^{u_1\ o}_{v_1\ o}]$

$$R \equiv x^2 \qquad S \equiv x^2 \qquad T \equiv x^2 - \frac{b^2}{x^2 q^2} \qquad V \equiv 2z.$$

$$R_0 \equiv \frac{x^2 q}{b} \qquad S_0 \equiv \frac{x^2 q}{b} \qquad T_0 \equiv \frac{x^2 q}{b} - \frac{b}{x^2 q} \qquad V_0 \equiv \frac{2zq}{b}$$

Operationskategorien $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R}_x \equiv -\left[\frac{x^2 q}{b}\frac{d}{dx} + \left(\frac{x^2 q}{b} - \frac{b}{x^2 q}\right)\frac{d}{dy} + \frac{2zq}{b}\frac{\partial}{\partial q}\right]$$

$$\mathfrak{R}_y \equiv \frac{x^2 q}{b}\left(\frac{d}{dx} + \frac{d}{dy}\right) + \frac{2zq}{b}\frac{\partial}{\partial p}$$

$$\mathfrak{R}_p \equiv \frac{x^2 q}{b}\left(-\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}\right)$$

$$\mathfrak{R}_q \equiv -\left(\frac{x^2 q}{b} - \frac{b}{x^2 q}\right)\frac{\partial}{\partial p} + \frac{x^2 q}{b}\frac{\partial}{\partial q}$$

Derivationskategorien $(\mathfrak{R})_0$:

$$(\mathfrak{R}_x)_0 \equiv -\frac{2}{b}(z + xq); \qquad (\mathfrak{R}_y)_0 \equiv \frac{2xq}{b} \qquad (\mathfrak{R}_p)_0 \equiv (\mathfrak{R}_q)_0 \equiv \frac{x^2}{b}$$

Derivatorna af funktionen iv_0:

$$\frac{div_0}{dx} \equiv \frac{2}{x} \qquad \frac{div_0}{dy} \equiv 0 \qquad \frac{\partial iv_0}{\partial p} \equiv 0 \qquad \frac{\partial iv_0}{\partial q} \equiv \frac{1}{q}$$

Operationen non-$\mathfrak{J}_{iv_0}$:

$$\text{non-}\mathfrak{J}_{iv_0} \equiv 2\frac{\partial}{\partial z} + \frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial z} + \frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial y}$$

Operationsresultatet non-$\mathfrak{J}_{iv_0}\chi$ är noll, då χ införes såsom en af de gifna karakteristiska integralerna u_1, v_1 hvilken som helst. Operationen non-$\mathfrak{J}_{iv_0}$ är alltså möjlig för fallet $\mathrm{M}_{v_1\ o}^{u_1\ o}]$.

Att operationen non-$\mathfrak{J}_{iv_0}$ är möjlig för det karakteristiska fallet $\mathrm{M}_{o\ o}^{c\ o}]$ tarfvar intet bevis; karakteristikan - det omedelbara Mongeska bestämmandet — bestämmer icke i sig själf för detta fall; operationen non-$\mathfrak{J}_{iv_0}$ tillämpad på det fallet, kan då icke strida mot någon för fallet i fråga omedelbart gifven bestämdhet, operationen non-$\mathfrak{J}$ är alltså möjlig för fallet i fråga för så vidt den är möjlig för samtliga andra fall, hvilka det Mongeska systematiska bestämmandet ställer såsom problematiska.

Mom. 2. Vi ha uppvisat att operationen non-$\mathfrak{J}_{iv_0}$ gäller inom hela cirkeln C. Vi kunna då påstå om operationen i fråga, att den upptager Monges problem i *allmänformen*. Visserligen finns det Mongeska karakteristiska fall *utanför* cirkeln C, men de äro icke verkliga problemställningar. Operationen non-$\mathfrak{J}_{iv_0}$ måste utesluta dessa fall — de omedelbart lösbara uppgifterna — den måste ju i sin egenskap af högre enhet eller af relativ förklaringsgrund syfta omedelbart på det problem som finns; operationen kan icke anses upphöra att vara allmänt bestämmande bara därför att den utesluter sådant som den måste utesluta. Men de problematiska fallen C äro icke problematiska på samma sätt, då de betraktas såsom problem för operationen non-$\mathfrak{J}_{iv_0}$ och för det karakteristiska bestämmandet M. Bestämmandet M *ställer* problemen C rätt och slätt, operationen non-$\mathfrak{J}_{iv_0}$ *förklarar åtskilligt* som hör till problemen. Monges problem måste alltså ställas på nytt; intresset knyter sig nämligen till den frågan: hvad finns inom området C som förblir oförklaradt från synpunkten af operationen non-$\mathfrak{J}_{iv_0}$. Det som förblir oförklaradt i förhållande till operationen non-$\mathfrak{J}_{iv_0}$ det är något som står i skarp motsats mot opera-

tionen själf betraktad såsom förklaringsgrund eller enhetsoperation. Detta *något* kan icke vara indentiskt med ett visst karakteristiskt fall eller med vissa sådana, ty ett visst karakteristiskt fall står i skarp motsats mot ett annat sådant eller mot alla de andra, ett visst karakteristiskt fall bildar alldeles icke en skarp motsats mot enhetsoperationen non-$\mathfrak{J}_{iv_0}$. Vi vilja fixera motsatsen mot enhetsoperationen non-$\mathfrak{J}_{iv_0}$.

Då vi gjort åtskillnad mellan olika karakteristiska fall: $\mathrm{M}^{u_1\ u_2]}_{v_1\ v_2}$ $\mathrm{M}^{u_1\ o]}_{v_1\ o]}$ o. s. v., så ha vi förutsatt att vi ha en säker metod för bestämmandet af antalet befintliga integrabla kombinationer inom hvarje karakteristika. Hade vi icke en säker metod vid det bestämmandet, så skulle vi icke kunna skilja fallen åt skarpt; cirkeln C skulle bortfalla; ett skarpt fattadt problemläge hade vi då icke längre; den förklaring vi gett — enhetsoperationen non-$\mathfrak{J}_{iv_0}$ — skulle upphäfvas, ty den hänför sig omedelbart till cirkeln C (till det egentliga problemläget). Vid det bestämmande hvarom här är fråga användas operationer som äro likartade med operationen non-$\mathfrak{J}_{iv_0}$ — partiella differentialeqvationer af första ordningen — men *icke en enstaka* operation utan en mångfald af operationer, en operationskategori. Sin enklaste form har denna operationskategori då mångfalden är *tvåfald*. Booles system är enkelt i denna mening; det har allenast två operationer Δ_1 och Δ_2

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &\equiv \frac{d}{dx} + \rho_1 \frac{d}{dy} + \frac{V}{R}\frac{\partial}{\partial p} \\ \Delta_2 &\equiv \frac{\partial}{\partial q} - \sigma_1 \frac{\partial}{\partial p} \\ \mu &= \frac{\rho}{\sigma} \\ R\mu^2 - 2S\mu + T &\equiv 0 \end{aligned}\right\} B$$

Operationen af 1:sta ordningen Δ_3

$$\Delta_3 \equiv \Delta_1 \Delta_2 - \Delta_2 \Delta_1$$

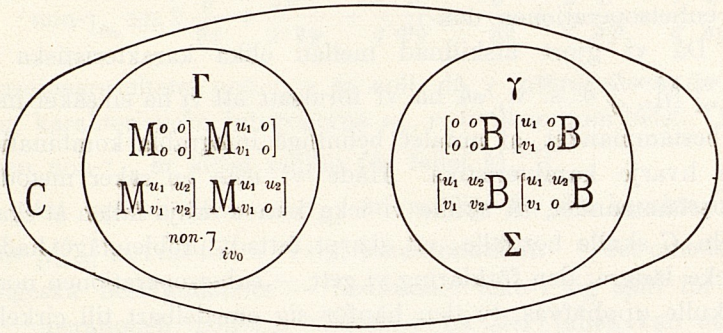
kommer till systemet B genom ren härledning; den är i allmänhet *olik* operationerna Δ_1 och Δ_2. Operationerna af 1:sta ordningen Δ_4 och Δ_5

$$\Delta_4 \equiv \Delta_3 \Delta_1 - \Delta_1 \Delta_3 \qquad \Delta_5 \equiv \Delta_3 \Delta_2 - \Delta_2 \Delta_3$$

komma till systemet B på samma sätt; de äro i allmänhet *olika*

operationerna Δ_1 Δ_2 Δ_3. Det Booleska operationssystemet är i allmänhet *icke-jacobiskt*: det ger integraler till olika antal och i allmänhet ingen integral; så till vida är det skarpt motsatt enhetsoperationen non-$\mathcal{J}_{iv_0}$ som ger ett *bestämdt* antal integraler.

Vi draga nu inom konturen C tvänne cirklar Γ och γ.



cirkeln Γ afses inrymma det som förklaras genom operationen non-$\mathcal{J}_{iv_0}$; cirkeln Γ måste då anses innesluta *samtliga* karakteristiska fall som höra till cirkeln C, ty samtliga dessa fall omfattas af operationen non-$\mathcal{J}_{iv_0}$, och själfva omfattandet innebär nödvändigt *någon* förklaring. Cirkeln γ afses inrymma det som förblir oförklaradt i förhållande till operationen non-$\mathcal{J}_{iv_0}$ m. a. o. det som ligger öfver den operationens förklaring, cirkeln γ måste då anses innesluta alla de nämda karakteristiska fallen, ty alla sättes de omedelbart genom det Booleska systematiska bestämmandet, och satta såsom fall under det Booleska bestämmandet ha de skarp motsats mot operationen non-$\mathcal{J}_{iv_0}$.

Den Booleska kategorien betecknar skarp motsats mot enhetsoperationen non-$\mathcal{J}_{iv}$ i och genom det att mångfalden af operationer inom kategorien är tvåfald. Men Booles kategori ger icke motsatsen med *all* nödig skärpa. I konstruktionen, i den yttre bilden, är Booles kategori icke hållbar. Operationen non-$\mathcal{J}_{iv_0}$ är en symmetrisk konstruktion, en skarpt utformad bild; men Booles konstruktion är osymmetrisk, relativt formlös, i det draget är den icke skarp motsats mot operationen non-$\mathcal{J}_{iv_0}$. Vi måste uppsöka en kategori Σ som ger motsatsen mot operationen non-$\mathcal{J}_{iv_0}$ med all nödig skärpa: med två operationer som äro symmetriformer.

Operationen non-$\mathfrak{I}_{iv_0}$ beror af funktionen iv_0; den funktionen har definierats i § 2 mom. 1. Men funktionen iv_0 är härledd ur en annan funktion, funktionen u_0. *Omedelbart* — i derivationskategorien § 2. mom. 1 — definieras funktionen u_0. Definierandet af funktionen iv_0 sker i en viss ordning: först bildas (i operationskategorien) derivatorna af funktionen u_0; därefter elimineras (genom derivationskategorien) dessa derivator; eliminationsresultaten ge derivatorna af funktionen iv_0, Funktionen iv_0 förutsätter tydligen funktionen u_0; den förra funktionen är alltså härledd ur den senare. Sammanhanget mellan funktionen u_0 och funktionen iv_0 är det *nödvändiga* operationssammanhang som vi ha; operationen non-$\mathfrak{I}_{iv_0}$ betecknar icke det sammanhanget, den inrymmer icke funktionen u_0; operationen i fråga är alltså icke nödvändig i vår närvarande relation, den är bara en *möjlighet* som finns. Sammanhanget mellan u_0 och iv_0 kan ge ett operationsuttryck som är motsatt operationsuttrycket non-$\mathfrak{I}_{iv_0}$ och högre än detta, för så vidt sammanhanget mellan u_0 och iv_0 är det nödvändiga eller adæqvata sammanhanget och operationen non-$\mathfrak{I}_{iv_0}$ det möjliga. Vi skola fixera operationssammanhanget mellan u_0 och iv_0 i motsats mot operationen non-$\mathfrak{I}_{iv_0}$.

Vi äga från föregående paragraf (§ 2. mom. 1) en afbildning af operationssammanhanget mellan u_0 och iv_0; afbildningen i fråga är den följande:

$$\frac{div_0}{dx} = -\left(S_0 \frac{du_0}{dx} + T_0 \frac{du_0}{dy} + V_0 \frac{\partial u_0}{\partial q}\right)$$

$$\frac{div_0}{dy} = R_0 \frac{du_0}{dx} + S_0 \frac{du_0}{dy} + V_0 \frac{\partial u_0}{\partial p}$$

$$\frac{\partial iv_0}{\partial p} = -S_0 \frac{\partial u_0}{\partial p} + R_0 \frac{\partial u_0}{\partial q}$$

$$\frac{\partial iv_0}{\partial q} = -T_0 \frac{\partial u_0}{\partial p} + S_0 \frac{\partial u_0}{\partial q}$$

Vi multiplicera ofvanstående fyra eqvationer i ordning med qvantiteterna: $\frac{\partial u_0}{\partial p}$, $\frac{\partial u_0}{\partial q}$, $-\frac{du_0}{dx}$, $-\frac{du_0}{dy}$; därefter addera vi eqvationerna; resultatet blifver:

$$\frac{div_0}{dx} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial p} + \frac{div_0}{dy} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial q} - \frac{\partial iv_0}{\partial p} \cdot \frac{du_0}{dx} - \frac{\partial iv_0}{\partial q} \cdot \frac{du_0}{dy} = 0$$

Resultatet kan skrifvas under formen:

$$\mathcal{J}_{iv_0}^{u_0} = 0$$

eller ock under formen:

$$\mathcal{J}_{u_0}^{iv_0} = 0$$

Relationen $\mathcal{J}_{iv_0} u_0 = 0$ ger sammanhanget mellan u_0 och iv_0 förmedelst operationen:

$$\mathcal{J}_{iv_0}$$

den operationen är symmetrisk (§ 2. mom. 2.) och den är skarpt motsatt operationen non-$\mathcal{J}_{iv_0}$:

$$\text{non-}\mathcal{J}_{iv_0} \equiv 2\frac{\partial}{\partial z} + \mathcal{J}_{iv_0}$$

Det som vi fasthålla i operationen $\mathcal{J}$ är tvåfalden af operationer $\mathcal{J}_{u_0}$ och $\mathcal{J}_{iv_0}$, ett visst sammanhang mellan u_0 och iv_0 alltså; ingendera af operationerna $\mathcal{J}_{u_0}$ och $\mathcal{J}_{iv_0}$ är, för sig tagen, enhetsoperation bredvid operationen non-$\mathcal{J}_{iv_0}$. Operationskategorien:

$$\mathcal{J}_{u_0} \quad \mathcal{J}_{iv_0}$$

är den kategori Σ som vi söka; vi benämna den (med anslutning till Sophus Lie) *involutionskategorien.* Vi göra följande påstående:

Involutionskategorien upptager Monges problem i allmänformen samt i ordning relativt operationen non-$\mathcal{J}_{iv_0}$.

Kategorien $\mathcal{J}_{u_0}$, $\mathcal{J}_{iv_0}$ inses gälla såsom allmänform för så vidt den visar sig kunna omfatta samtliga karakteristiska fall som äro i fråga, alltså fallen: $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}\mathrm{B}$, $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & o \end{bmatrix}\mathrm{B}$. $\begin{bmatrix} u_1 & o \\ v_1 & o \end{bmatrix}\mathrm{B}$, $\begin{bmatrix} o & o \\ o & o \end{bmatrix}\mathrm{B}$. Kategoriens ordning relativt operationen non-$\mathcal{J}_{iv_0}$ står klar, om det visar sig att kategorien sätter vid hvarje karakteristiskt fall ett högre problemläge än operationen.

Ex. 8: a. $\quad x^4 r - 4x^2 qs + 3q^2 t + 2x^3 p = 0$

Imschenetsky

Det Mongeska systemet:

$$x^4\,\delta y^2 + 4x^2\,\delta y\,\delta x + 3q^2\,\delta x^2 = 0$$

$$x^4\,\delta y\,\delta p + 3q^2\,\delta x\,\delta q = -\,2x^3 p\,\delta y\,\delta x$$

$$\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y$$

Hvardera karakteristikan har en integral:

$$u_1 = x^2p - \frac{1}{2}q^2 \qquad v_1 = x^2p - \frac{3}{2}q^2$$

$$R \equiv x^4 \qquad S \equiv -2x^2q \qquad T \equiv 3q^2 \qquad V \equiv -2x^3p$$

$$R_0 \equiv \frac{x^2}{q} \qquad S_0 \equiv -2 \qquad T_0 \equiv \frac{3q}{x^2} \qquad V_0 \equiv -\frac{2xp}{q}$$

Operationskategorien $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R}_x \equiv -\left[(-2)\,.\,\frac{d}{dx} + \frac{3q}{x^2}\cdot\frac{d}{dy} - \frac{2xp}{q}\frac{\partial}{\partial q}\right]$$

$$\mathfrak{R}_y \equiv \frac{x^2}{q}\frac{d}{dx} - 2\,.\,\frac{d}{dy} - \frac{2xp}{q}\frac{\partial}{\partial p}$$

$$\mathfrak{R}_p \equiv 2\,.\,\frac{\partial}{\partial p} + \frac{x^2}{q}\frac{\partial}{\partial q}$$

$$\mathfrak{R}_q \equiv -\frac{3q}{x^2}\frac{\partial}{\partial p} - 2\,.\,\frac{\partial}{\partial q}$$

Derivationskategorien $(\mathfrak{R})_0$:

$$(\mathfrak{R}_x)_0 \equiv -\frac{2xp}{q^2} \qquad (\mathfrak{R}_y)_0 \equiv 0 \qquad (\mathfrak{R}_p)_0 \equiv -\frac{x^2}{q^2} \qquad (\mathfrak{R}_q)_0 \equiv 0$$

Operationen $\mathfrak{J}_{u_0}$:

$$\mathfrak{J}_{u_0} \equiv -\frac{x}{q^2}\left[2p\frac{\partial}{\partial p} - x\frac{d}{dx}\right]$$

Derivatorna af funktionen iv_0:

$$\frac{div_0}{dx} \equiv -\frac{4xp}{q^2} \qquad \frac{div_0}{dy} \equiv 0 \qquad \frac{\partial iv_0}{\partial p} \equiv -\frac{2x^2}{q^2} \qquad \frac{\partial iv_0}{\partial q} \equiv \frac{3}{q}$$

Operationen $\mathfrak{J}_{iv_0}$:

$$\mathfrak{J}_{iv_0} \equiv -\frac{1}{q^2}\left[4xp\frac{\partial}{\partial p} - 2x^2\frac{d}{dx} + 3q\frac{d}{dy}\right]$$

Operationssystemet $\mathfrak{J}_{u_0}$, $\mathfrak{J}_{iv_0}$ är jacobiskt eller fullständigt; de partiella differentialeqvationerna:

$$\mathfrak{J}\underset{u_0}{\chi} = 0 \qquad \mathfrak{J}\underset{iv_0}{\chi} = 0$$

ha nämligen *tre* gemensamma integraler: endels de karakteristiska integralerna u_1 och v_1 endels en funktion w_1:

$$w_1 = z + xp - yq$$

funktionen w_1 erhålles såsom operationsresultatet, då differential-

eqvationen $\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y$ integreras med tillhjälp af relationerna $x^2p - \frac{1}{2}q^2 = u_1$ och $x^2p - \frac{3}{2}q^2 = v_1$.

Ex. 8: b. $$x^2r + 2x^2s + \left(x^2 - \frac{b^2}{x^2q^2}\right)t = 2z$$

Vi känna igen detta exempel från det föregående (Ex. 7). Vi bilda på vanligt sätt operationerna $\mathfrak{J}_{u_0}$, $\mathfrak{J}_{iv_0}$:

$$\mathfrak{J}_{u_0} \equiv \frac{1}{b}\left[-2(z + xq)\frac{\partial}{\partial p} + 2xq\frac{\partial}{\partial q} - x^2\frac{d}{dx} - x^2\frac{d}{dy}\right].$$

$$\mathfrak{J}_{iv_0} \equiv \frac{1}{xq}\left[2q\frac{\partial}{\partial p} - x\frac{d}{dy}\right]$$

Operationskategorien ofvan är icke ett jacobiskt system; de befintliga karakteristiska integralerna u_1 och v_1

$$u_1 = x^2(p + q) - 2xz \mp b\log q \pm 2b\log x$$

identifiera icke i stället för χ eqvationerna:

$$\mathfrak{J}_{u_0}\chi \equiv 0 \qquad \mathfrak{J}_{iv_0}\chi \equiv 0$$

Funktionen w_1:

$$w_1 = -\frac{z}{3x^2} - \frac{p}{3x} + \frac{3y - 4x}{3x^2}q$$

(bildad ur relationerna $\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y$, $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ så som exemplet 8:a anvisar) identifierar icke heller eqvationerna. Systemet $\mathfrak{J}_{u_0}\chi = 0$, $\mathfrak{J}_{iv_0}\chi = 0$ ger då icke omedelbart eller i sig själf systemet $u_1 = 0$, $v_1 = 0$, $w_1 = 0$; men bestämningarne $\mathfrak{J}_{u_0}\chi = 0$, $\mathfrak{J}_{iv_0}\chi = 0$, ehuru nya bestämningar, äro *icke helt främmande* för bestämningarne $u_1 = v_1 = w_1 = 0$. Vi skola visa om dem, att de ha betydelse för systemet $u_1 = v_1 = w_1 = 0$ såsom ett *härledt* moment, såsom *samhöriga transformatorer* (jmfr. Sophus Lie. Over en Classe geometriske Transformationer. § 6).

Vi införa i stället för funktionen $\chi(x, y, z, p, q)$ funktionen $\chi(u_1, v_1, w_1)$ och utföra operationerna $\mathfrak{J}_{u_0}$ och $\mathfrak{J}_{iv_0}$ på funktionen $\chi(u_1, v_1, w_1)$:

$$\frac{\partial\chi}{\partial u_1}\mathfrak{J}_{u_0}u_1 + \frac{\partial\chi}{\partial v_1}\mathfrak{J}_{u_0}v_1 + \frac{\partial\chi}{\partial w_1}\mathfrak{J}_{u_0}w_1 = 0$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial u_1}\mathfrak{J}_{iv_0}u_1 + \frac{\partial\chi}{\partial v_1}\mathfrak{J}_{iv_0}v_1 + \frac{\partial\chi}{\partial w_1}\mathfrak{J}_{iv_0}w_1 = 0$$

Vi välja funktionen χ så, att $\frac{\partial \chi}{\partial w_1} \equiv -1$ samt utföra operationsresultaten $\mathfrak{J}_{u_0} u_1$, $\mathfrak{J}_{u_0} v_1$ o. s. v. Eqvationerna ofvan antaga då följande form:

$$-4x \frac{\partial \chi}{\partial u_1} + 4x \frac{\partial \chi}{\partial v_1} - \frac{4q}{b} \frac{y-x}{x} = 0$$

$$4x \frac{\partial \chi}{\partial u_1} + 4x \frac{\partial \chi}{\partial v_1} + \frac{4}{3x^2} = 0$$

Ur eqvationerna ofvan erhållas:

$$\frac{\partial \chi}{\partial u_1} = -\frac{1}{6x^3} - \frac{q}{2b} \frac{y-x}{x^2} \qquad \frac{\partial \chi}{\partial v_1} = -\frac{1}{6x^3} + \frac{q}{2b} \frac{y-x}{x^2}$$

Vi känna igen dessa bestämningar; Imschenetsky har dem vid sin solution af eqvationen $x^2 r + 2x^2 s + \left(x^2 - \frac{b^2}{x^2 q^2}\right) t = 2z$ såsom simultana med bestämningarne $u_1 = v_1 = w_1 = 0$.

De särskilda fallen 8:a och 8:b tillhöra begge fallet $\begin{bmatrix} u_1 & o \\ v_1 & o \end{bmatrix} \mathrm{B}$. Vi ha konstaterat att involutionskategorien $\mathfrak{J}_{u_0}$, $\mathfrak{J}_{iv_0}$ upptager båda dessa särskilda fall inom sitt operationsområde, dock på olika sätt eller *i en viss ordning*. Vi beteckna *typen för det särskilda fallet* 8:a genom symbolen $\begin{bmatrix} u_1 & o \\ v_1 & o \end{bmatrix} \mathrm{B}'$ och *typen för det särskilda fallet* 8:b genom symbolen $\begin{bmatrix} u_1 & o \\ v_1 & o \end{bmatrix} \mathrm{B}''$. Involutionskategorien ger oss alltså fallet $\begin{bmatrix} u_1 & o \\ v_1 & o \end{bmatrix} \mathrm{B}$ förmedelst *tvänne* moment: $\begin{bmatrix} u_1 & o \\ v_1 & o \end{bmatrix} \mathrm{B}'$ och $\begin{bmatrix} u_1 & o \\ v_1 & o \end{bmatrix} \mathrm{B}''$.

Ex. 9: a. $\qquad x^2 r - y^2 t = (px + qy - z)^2$

Vi igenkänna detta exempel från det föregående (ex. 6).

$$\mathfrak{J}_{u_0} \equiv \frac{1}{x} [1 - 2(px + qy - z)] \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{y} [1 + 2(px + qy - z)] \frac{\partial}{\partial q}$$

$$\mathfrak{J}_{iv_0} \equiv \frac{1}{x} [1 + 2(px + qy - z)] \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{y} [1 - 2(px + qy - z)] \frac{\partial}{\partial q}$$

Operationerna $\mathfrak{J}_{u_0}$ och $\mathfrak{J}_{iv_0}$ äro tydligen *olika*. De bilda ett jacobiskt system; de ha nämligen *trenne* gemensamma operationskonstanter u_1, v_1, w_1:

$$u_1 = xy \qquad v_1 = \frac{y}{x} \qquad w_1 = z$$

Ex. 9: b. $xr + (x-y)s - yt = p + q - xy$

Forsyth.

Det Mongeska systemet:

$$x\,\delta y^2 - (x-y)\,\delta y\,\delta x - y\,\delta x^2 = 0$$

$$x\,\delta y\,\delta p - y\,\delta x\,\delta q = (p + q - xy)\,\delta y\,\delta x$$

$$\delta z = p\,\delta x + q\,\delta y$$

Trenne karakteristiska integraler finnas:

$$u_1 = xy \qquad u_2 = \frac{p+q-xy}{x} \qquad v_1 = x - y$$

$$R \equiv x \qquad S \equiv \frac{x-y}{2} \qquad T \equiv -y \qquad V \equiv p + q - xy$$

$$R_0 \equiv \frac{2x}{x-y} \qquad S_0 \equiv \frac{x-y}{x+y} \qquad T_0 \equiv -\frac{2y}{x+y} \qquad V_0 \equiv \frac{2(p+q-xy)}{x+y}$$

Operationskategorien $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R}_x \equiv -\left[\frac{x-y}{x+y}\frac{d}{dx} - \frac{2y}{x+y}\frac{d}{dy} + \frac{2(p+q-xy)}{x+y}\frac{\partial}{\partial q}\right]$$

$$\mathfrak{R}_y \equiv \frac{2x}{x+y}\frac{d}{dx} + \frac{x-y}{x+y}\frac{d}{dy} + \frac{2(p+q-xy)}{x+y}\frac{\partial}{\partial p}$$

$$\mathfrak{R}_p \equiv -\frac{x-y}{x+y}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{2x}{x+y}\frac{\partial}{\partial q}$$

$$\mathfrak{R}_q \equiv \frac{2y}{x+y}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{x-y}{x+y}\frac{\partial}{\partial q}$$

Derivationskategorien $(\mathfrak{R})_0$:

$$(\mathfrak{R}_x)_0 \equiv -\frac{4y}{(x+y)^2} \qquad (\mathfrak{R}_y)_0 \equiv \frac{4y}{(x+y)^2} \qquad (\mathfrak{R}_p)_0 \equiv (\mathfrak{R}_q)_0 \equiv 0$$

Operationen $\mathfrak{I}_{u_0}$:

$$\mathfrak{I}_{u_0} \equiv -\frac{4y}{(x+y)^2}\left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q}\right)$$

Derivatorna af funktionen iv_0:

$$\frac{div_0}{dx} \equiv \frac{4y}{(x+y)^2} \qquad \frac{div_0}{dy} \equiv -\frac{4y}{(x+y)^2} \qquad \frac{\partial iv_0}{\partial p} \equiv \frac{\partial iv_0}{\partial q} \equiv 0$$

Operationen $\mathfrak{I}_{iv_0}$:

$$\mathfrak{I}_{iv_0} \equiv \frac{4y}{(x+y)^2}\left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q}\right)$$

Operationerna $\mathfrak{I}_{u_0}$ och $\mathfrak{I}_{iv_0}$ äro *lika* i operationsfaktorn; operationskategorien öfvergår i en enstaka operation. De särskilda fallen 9:a och 9:b tillhöra begge fallet $\begin{bmatrix} u_1 & u \\ v_1 & o \end{bmatrix}\mathrm{B}$. Involutionskategorien upptager begge inom sitt operationsområde, ty kategorien *determinerar sig* på visst sätt för begge fallen. Men den determinerar sig icke på *samma* sätt för begge fallen; i fallet 9:a äro $\mathfrak{I}_{u_0}$ och $\mathfrak{I}_{iv_0}$ *olika* i operationsfaktorn, i fallet 9: b äro $\mathfrak{I}_{u_0}$ och $\mathfrak{I}_{iv_0}$ *lika* i operationsfaktorn. Vi få alltså för fallet $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & o \end{bmatrix}\mathrm{B}$ de begge momenten $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & o \end{bmatrix}\mathrm{B}'$ och $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & o \end{bmatrix}\mathrm{B}''$.

Ex. 10: a $$r - t = \frac{p^2 - q^2}{z}$$

Exemplet återfinnes i det föregående (ex. 1).

$$\mathfrak{I}_{u_0} \equiv \frac{2}{z}\left(q\frac{\partial}{\partial p} + p\frac{\partial}{\partial q}\right) \qquad \mathfrak{I}_{iv_0} \equiv \frac{2}{z}\left(p\frac{\partial}{\partial p} + q\frac{\partial}{\partial q}\right)$$

$$\because \quad \mathfrak{I}_{u_0} \neq \mathfrak{I}_{iv_0}$$

Ex. 10: b. $$x^2 r - y^2 t = xp - yq + xy$$

Exemplet återfinnes i det föregående (ex. 2).

$$\mathfrak{I}_{u_0} \equiv 2\left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial q}\right) \qquad \mathfrak{I}_{iv_0} \equiv 2\left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial q}\right)$$

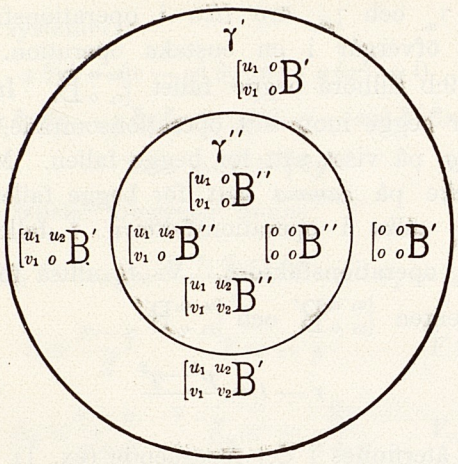
$$\because \quad \mathfrak{I}_{u_0} = \mathfrak{I}_{iv_0}$$

De särskilda fallen 10: a och 10: b tillhöra begge fallet $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}\mathrm{B}$. Äfven för detta fall få vi alltså från involutionskategoriens synpunkt *tvänne* moment: $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}\mathrm{B}'$ och $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}\mathrm{B}''$.

Uppdelningen i tvänne moment inses vara möjlig för fallet $\begin{bmatrix} o & o \\ o & o \end{bmatrix}\mathrm{B}$ för så vidt uppdelningen kommit till stånd för alla andra fall.

Vi draga inom cirkeln γ en koncentrisk cirkel; vi benämna den inre cirkelns område γ'' och cirkelringens område γ'. Involutionskategorien gäller inom hela den yttre cirkeln γ; involutionskategorien upptager Monges problem i allmänformen. Relativt enhetsoperationen non-$\mathfrak{I}_{iv_0}$ är cirkeln γ det rent obekanta området, problemställningen som finns. En *ordning* γ', γ'' inom området γ är ett öfverordnadt moment i förhållande till operationen

non-$\mathfrak{J}_{iv_0}$, en lösning af det problem som operationen non-$\mathfrak{J}_{iv_0}$ ställer. Lösningen är *relativ* eller ofullständig, för så vidt involutions-



kategorien, betraktad i allmänformen, är ett ofullständigt (icke-jacobiskt) system. Monges problem ställes alltså på nytt; det ställes såsom involutionskategoriens $\mathfrak{J}_{u_0}$, $\mathfrak{J}_{iv_0}$ problem; det fördjupas då det ställes från den synpunkten.

§ 4.

Det Mongeska systemet i kategorien reaktion.

Mom. 1. Vi ha betraktat funktionerna iv_0 och u_0 såsom integraler. Funktionerna äro möjliga på det sättet, de äro dock icke nödvändigt bestämda så, de äro icke *definierade* såsom integraler. Funktionerna skulle vara definierade såsom integraler, om *hela skaran af olika derivationer* som de kunna ha vore definierad. De fem partiella derivatorna af funktionerna:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} \quad \frac{\partial\omega}{\partial z} \quad \frac{\partial\omega}{\partial p} \quad \frac{\partial\omega}{\partial q}$$

$$\omega = u_0,\ iv_0$$

beteckna hela skaran af olika derivationer. Vore de definierade *alla fem*, så vore funktionerna nödvändigt bestämda såsom integraler. De äro icke definierade alla fem, allenast *fyra* af dem äro definierade; vi ha definierat (§ 2, mom. 1) derivationerna:

$$\frac{d\omega}{dx},\ \frac{d\omega}{dy},\ \frac{\partial\omega}{\partial p},\ \frac{\partial\omega}{\partial q}$$

Om funktionerna iv_0, u_0 måste alltså fastslås, att de *just såsom integraler betraktade ligga qvar i differentialeqvationerna.* I själfva integraltypen som de ha innebära de då icke nödvändigt solution eller relativ lösning, ty den funktion som är *lösning relativt differentialoperationer går såsom sådan ut ur operationerna*, den ligger icke qvar i operationerna. Vi skola visa om funktionerna iv_0 och u_0 *att de ha ett sätt att gå ut ur operationerna;* vi skola ställa dem i predikamentet *reaktion.* De gå *icke* ut ur operationerna *hvar för sig,* de gå *icke* ut *i integraltypen* nödvändigt, då de stå i predikamentet reaktion; de gå ut ur operationerna allenast *in abstracto:* i sitt *sammanhang såsom tvåfald*, såsom *skaran* u_0, iv_0. Vi benämna funktionerna iv_0 och u_0 *reagenser*, då de stå i predikamentet reaktion eller såsom kategorien reaktion. Vi skola visa om reagenserna att de utgå såsom den relativa solutionen då det Mongeska problemet kommer före såsom kategorien variation d. v. s. såsom en allmän problemställning inom variationskalkylen.

Mom. 2. Vi betrakta systemet

$$\mathfrak{J}_{u_0}\chi = 0 \qquad \mathfrak{J}_{iv_0}\chi = 0$$

vi vilja framlägga de olika möjligheter som komma före vid systemets fullständigande.

N:o 1). Vi antaga att systemet är fullständigt i den gifna formen (med tvänne bestämningar alltså). Antalet integraler är då 3; vi beteckna denna möjlighet genom symbolen $\mathfrak{D}(3)$.

N:o 2). Vi antaga att systemet icke är fullständigt i den gifna formen eller med tvänne bestämningar; vi antaga att *en* ny eller självständig bestämning kommer till. Vi skola uppsöka den nya bestämningen.

Systemet $\mathfrak{J}_{u_0}\chi = 0$, $\mathfrak{J}_{iv_0}\chi = 0$ har om symbolerna aflägsnas, formen:

$$\frac{du_0}{dx}\frac{\partial\chi}{\partial p} + \frac{du_0}{dy}\frac{\partial\chi}{\partial q} - \frac{\partial u_0}{\partial p}\frac{d\chi}{dx} - \frac{\partial u_0}{\partial q}\frac{d\chi}{dy} = 0$$

$$\frac{div_0}{dx}\frac{\partial\chi}{\partial p} + \frac{div_0}{dx}\frac{\partial\chi}{\partial q} - \frac{\partial iv_0}{\partial p}\frac{d\chi}{dx} - \frac{\partial iv_0}{\partial q}\frac{d\chi}{dy} = 0$$

Vi sätta systemet under den enklare formen:

$$\frac{d\chi}{dx} + r_0\frac{\partial\chi}{\partial p} + s_0'\frac{\partial\chi}{\partial q} = 0$$

$$\frac{d\chi}{dy} + s_0'' \frac{\partial \chi}{\partial p} + t_0 \frac{\partial \chi}{\partial q} = 0$$

$$r_0 \equiv \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial q} & \frac{du_0}{dx} \\ \frac{\partial iv_0}{\partial q} & \frac{div_0}{dx} \end{vmatrix} \quad s_0' \equiv \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial q} & \frac{du_0}{dy} \\ \frac{\partial iv_0}{\partial q} & \frac{div_0}{dy} \end{vmatrix} \quad s_0'' \equiv \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \frac{du_0}{dx} & \frac{\partial u_0}{\partial p} \\ \frac{div_0}{dx} & \frac{\partial iv_0}{\partial p} \end{vmatrix}$$

$$t_0 \equiv \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \frac{du_0}{dy} & \frac{\partial u_0}{\partial p} \\ \frac{div_0}{dy} & \frac{\partial iv_0}{\partial p} \end{vmatrix} \quad D \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial p} & \frac{\partial u_0}{\partial q} \\ \frac{\partial iv_0}{\partial p} & \frac{\partial iv_0}{\partial q} \end{vmatrix}$$

Qvantiteterna s_0' och s_0'' äro *lika;* determinanterna $\begin{vmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial q} & \frac{du_0}{dy} \\ \frac{\partial iv_0}{dq} & \frac{div_0}{dy} \end{vmatrix}$ och $\begin{vmatrix} \frac{du_0}{dx} & \frac{\partial u_0}{\partial p} \\ \frac{div_0}{dx} & \frac{\partial iv_0}{\partial p} \end{vmatrix}$ äro nämligen lika på grund af relationen (§ 3 mom 2):

$$\mathfrak{J}_{iv_0}^{u_0} = 0$$

Vårt system har nu följande form:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)_0 \chi = 0 \qquad \left(\frac{d}{dy}\right)_0 \chi = 0$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)_0 \equiv \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z} + r_0\frac{\partial}{\partial p} + s_0\frac{\partial}{\partial q} \qquad \left(\frac{d}{dy}\right)_0 \equiv \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z} +$$

$$+ s_0\frac{\partial}{\partial p} + t_0\frac{\partial}{\partial q}$$

Enligt vårt antagande är det ofullständigt; operationen af 1:sta ordningen $\left(\frac{d}{dy}\right)_0\left(\frac{d}{dx}\right)_0 - \left(\frac{d}{dx}\right)_0\left(\frac{d}{dy}\right)_0$:

$$\left(\frac{d}{dy}\right)_0\left(\frac{d}{dx}\right)_0 - \left(\frac{d}{dx}\right)_0\left(\frac{d}{dy}\right) \equiv \left[\left(\frac{dr_0}{dy}\right)_0 - \left(\frac{ds_0}{dx}\right)_0\right]\frac{\partial}{\partial p} + \left[\left(\frac{ds_0}{dy}\right)_0 -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{dt_0}{dx}\right)_0\right]\frac{\partial}{\partial q}$$

kommer till operationerna $\left(\frac{d}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d}{dy}\right)_0$ genom ren härledning; den är en *ny* eller *fullständigande* bestämning; vi beteckna den genom symbolen ρ. Vårt system är nu det följande:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)_0 \chi = 0 \qquad \left(\frac{d}{dy}\right)_0 \chi = 0 \qquad \rho\chi = 0.$$

Antalet befintliga integraler är två, för så vidt systemet är fullständigt i den form det har eller med tre bestämningar. Vi beteckna denna möjlighet genom symbolen $\mathfrak{D}(2)$. Vi skola visa *att möjligheten $\mathfrak{D}(2)$ icke finns såsom möjlighet inom integralskarans hela möjlighetsområde*, vi skola visa *att systemet icke kan fasthållas i den form det har eller med tre bestämningar.*

Operationerna af 1:sta ordningen a och b

$$a \equiv \rho\left(\frac{d}{dx}\right)_0 - \left(\frac{d}{dx}\right)_0 \rho \equiv \left[\left(\frac{dr_0}{dy}\right)_0 - \left(\frac{ds_0}{dx}\right)_0\right]\frac{\partial}{\partial z} + a_p\frac{\partial}{\partial p} + a_q\frac{\partial}{\partial q}$$

$$b \equiv \rho\left(\frac{d}{dy}\right)_0 - \left(\frac{d}{dy}\right)_0 \rho \equiv \left[\left(\frac{ds_0}{dy}\right)_0 - \left(\frac{dt_0}{dx}\right)_0\right]\frac{\partial}{\partial z} + b_p\frac{\partial}{\partial p} + b_q\frac{\partial}{\partial q}$$

$$a_p \equiv \rho(r_0) - \left(\frac{d}{dx}\right)_0\left[\left(\frac{dr_0}{dy}\right)_0 - \left(\frac{ds_0}{dx}\right)_0\right]$$

$$a_q \equiv \rho(s_0) - \left(\frac{d}{dx}\right)_0\left[\left(\frac{ds_0}{dy}\right)_0 - \left(\frac{dt_0}{dx}\right)_0\right]$$

$$b_p \equiv \rho(s_0) - \left(\frac{d}{dy}\right)_0\left[\left(\frac{dr_0}{dy}\right)_0 - \left(\frac{ds_0}{dx}\right)_0\right]$$

$$b_q \equiv \rho(t_0) - \left(\frac{d}{dy}\right)_0\left[\left(\frac{ds_0}{dy}\right)_0 - \left(\frac{dt_0}{dx}\right)_0\right]$$

äro simultana med operationerna $\left(\frac{d}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d}{dy}\right)_0$, ρ. Bestämningarne:

$$a(\chi) = 0 \qquad b(\chi) = 0$$

lägga till systemet: $\left(\frac{d}{dx}\right)_0 \chi = \left(\frac{d}{dy}\right)_0 \chi = \rho\chi = 0$ *någon* ny eller fullständigande bestämning, för så vidt *något* af uttrycken:

$$\left(\frac{dr_0}{dy}\right)_0 - \left(\frac{ds_0}{dx}\right)_0$$

$$\left(\frac{ds_0}{dy}\right)_0 - \left(\frac{dt_0}{dx}\right)_0$$

är *skildt från noll.* Att upptaga en ny eller fullständigande bestämning till de tre gifna: $\left(\frac{d}{dx}\right)_0 \chi = \left(\frac{d}{dy}\right)_0 \chi = \rho\chi = 0$ är mot vårt antagande i N:o 2; vårt antagande i N:o 2 är att systemet $\mathfrak{I}_{u_0}\chi = \mathfrak{I}_{iv_0}\chi = 0$ är fullständigt genom närvaron af tre bestämningar. För att kunna behålla vårt antagande — möjligheten $\mathfrak{D}(2)$ — måste vi alltså upptaga identiteterna:

$$\left(\frac{dr_0}{dy}\right)_0 - \left(\frac{ds_0}{dx}\right)_0 \equiv 0 \qquad \left(\frac{ds_0}{dy}\right)_0 - \left(\frac{dt_0}{dx}\right)_0 \equiv 0$$

Dessa identiteter föra omedelbart med sig identiteten:

$$\rho \equiv 0$$

Vårt operationssystem är då fullständigt såsom skaran

$$\left(\frac{d}{dx}\right)_0 \qquad \left(\frac{d}{dy}\right)_0$$

m. a. o. det är fullständigt i sin omedelbart gifna form $\mathfrak{I}_{iv_0}, \mathfrak{I}_{iv_0}$. Vi ha kommit tillbaka till vårt antagande N:o 1. *Möjligheten* $\mathfrak{D}(2)$ *ligger utanför integralskarans möjlighetsområde.*

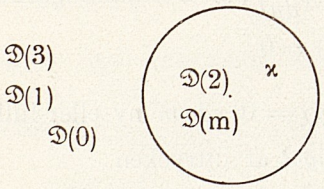
N:o 3. Vi antaga att operationerna *a* och *b* äro *lika.* Antalet integraler är då 1; vi beteckna denna möjlighet genom symbolen $\mathfrak{D}(1)$.

N:o 4. Vi antaga att operationerna *a* ocb *b* äro *olika.* Antalet integraler är då 0; vi beteckna denna möjlighet genom symbolen $\mathfrak{D}(0)$.

Vi beteckna med $\mathfrak{D}(n)$ den kategori som går ut ur operationerna vid det icke-definierade operationssystemet

$$\mathfrak{I}_{u_0}\chi = 0 \qquad \mathfrak{I}_{iv_0}\chi = 0$$

Kategorien $\mathfrak{D}(n)$ gäller *utom* en cirkel $\varkappa$ såsom *integralskarans existensmöjligheter:* $\mathfrak{D}(3)$, $\mathfrak{D}(1)$, $\mathfrak{D}(0)$ den gäller *inom* cirkeln $\varkappa$ såsom *reaktionskategoriens möjligheter:* $\mathfrak{D}(m)$, $\mathfrak{D}(2)$. Reaktionskategorien öfvergår *icke* från möjlig bestämdhet till nödvändig bestämdhet *genom integration;* den är *nödvändigt bestämd* eller *definierad därigenom* att kategorien $\mathfrak{D}(n)$ *fixeras i momentet tvåfald* $\mathfrak{D}(2)$. Vi ha att uppvisa detta. Först måste vi dock fastställa kategorien $\mathfrak{D}(m)$ — kategoriens $\mathfrak{D}(n)$ allmänna representant *inom* cirkeln $\varkappa$ — så, att den upptager Monges problem i allmänformen.



Vi införa i operationssystemet $\mathfrak{I}_{u_0}\chi = \mathfrak{I}_{iv_0}\chi = 0$ funktionen u_0 i stället för funktionen χ. Eqvationen $\mathfrak{I}_{u_0}\chi = 0$ öfvergår då i en ren identitet; eqvationen:

$$\mathfrak{I}_{iv_0} u_0 = 0$$

qvarstår såsom systemets representant. Vi införa på analogt sätt funktionen iv_0. Såsom operationssystemets representant framträder omedelbart eqvationen $\mathfrak{I}_{u_0} iv_0 = 0$ men denna eqvation är såsom vi veta (§ 3 mom. 2) identisk med eqvationen $\mathfrak{I}_{iv_0} u_0 = 0$. Om eqvationen $\mathfrak{I}_{iv_0} u_0 = 0$ veta vi att den är det *nödvändiga* sammanhanget mellan funktionerna u_0 och iv_0. Om funktionerna iv_0 och u_0 själfva veta vi att de ligga till grund för *alla enhetsoperationer* som vi användt vid Monges problem, m. a. o. att de upptaga Monges problem i allmänformen. Funktionerna iv_0 och u_0 äro *två* till antalet; reaktionskategorien är alltså allmänt möjlig just såsom den skaran; vi beteckna skaran genom symbolen $\mathfrak{D}(\mathrm{m})$.

Reaktionskategorien är icke *nödvändigt* bestämd, då den fasthålles såsom kategorien $\mathfrak{D}(\mathrm{m})$ eller såsom skaran u_0, iv_0; *tvåfalden* i skaran, *olikheten* mellan de funktioner som utgöra skaran, framträder icke klart nog. *Tvåfalden eller olikheten upphäfves helt och hållet om u_0 och iv_0 äro exakta begge två eller gå begge två ut ur operationerna genom integration:*

$$u_0 \equiv \int \frac{du_0}{dx}\,dx + \frac{du_0}{dy}\,dy + \frac{\partial u_0}{\partial p}\,dp + \frac{\partial u_0}{\partial q}\,dq = u_1\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q)$$

$$iv_0 \equiv \int \frac{div_0}{dx}\,dx + \frac{div_0}{dy}\,dy + \frac{\partial iv_0}{\partial p}\,dp + \frac{\partial iv_0}{\partial q}\,dq = v_1\,(x,\ y,\ z,\ p,\ q,)$$

Ty exakta funktioner u_1 och v_1 som uppfylla villkoret:

$$\mathfrak{I}_{v_1} u_1 = 0$$

göra differentialeqvationen $\delta z = p\delta x + q\delta y$ integrabel; de få en ny funktion — funktionen w_1 (jmfr ex. 8:a) — till sin skara, de beteckna en viss existensmöjlighet för integralskaran [den möjlighet som vi betecknat genom symbolen $\mathfrak{D}(3)$]; de beteckna icke en existensmöjlighet för reaktionskategorien. *Tvåfalden inom skaran u_0, iv_0, olikheten mellan funktionerna u_0 och iv_0 är fastslagen, om den ene af funktionerna går ut ur differentialoperationerna genom integration (framträder i exakt form) under det att den andre stannar i differentialoperationerna (framträder såsom icke-exakt integral).*

Då funktionerna u_0 och iv_0 stå tillsammans på detta sätt, säga vi om dem att de äro fixerade såsom kategorien $\mathfrak{D}(2)$, m. a. o. att de gå ut ur operationerna såsom kategorien reaktion.

Mom. 3. Uppmärksamma vi hvad som sagts ofvan om *de skarpt fixerade reagenserna* [om kategorien $\mathfrak{D}(2)$ m. a. o.]: *att de gå ut ur differentialoperationer eller beteckna sin karaktär af relativ lösning på ett sätt som står i bestämd motsats mot integraltypens* så inse vi att reagenser kunna fixeras för ett visst hithörande problemläge trots det att integraler icke kunna fixeras. *Ett* villkor måste dock vara uppfylldt, om kategorien reaktion skall kunna ha sin tillämplighet: det problem som föreställts till att få sin lösning måste vara en *verklig uppgift* m. a. o. det måste inses syfta bestämdt åt en lösning. Det karakteristiska fallet $\mathrm{M}_{o\ o}^{o\ o}]$ har icke omedelbart sin lösning genom integration; karakteristiska integraler saknas. Fallet i fråga kan emellertid innesluta en verklig uppgift; variationskalkylens uppgifter (de som *fixerats* såsom uppgifter åtminstone, jmfr Lindelöf & Moigno, Calcul des Variations) subsumeras under Monges problem och under fallet $\mathrm{M}_{o\ o}^{o\ o}]$ så långt de äro verkliga uppgifter eller uppgifter af intresse. Skaran af sådana uppgifter — kategorien variation — är enligt Lindelöf den följande:

Ex. 11. $(1+q^2)\,r - 2pqs + (1+p^2)\,t = 0$

Ex. 12. $(1+q^2)\,r - 2pqs + (1+p^2)\,t = \dfrac{1+p^2+q^2}{z-a}$

Ex. 13: a. $(1+q^2)\,r - 2pqs + (1+p^2)\,t = -\dfrac{1}{k}(1+p^2+q^2)^{3/2}$

Ex. 13: b. $(1+q^2)\,r - 2pqs + (1+p^2)\,t = -\dfrac{z+c}{a}(1+p^2+q^2)^{3/2}$

Såsom *typ* för en eqvation i skaran gäller nedanstående eqvation:

$$(1+q^2)\,r - 2pqs + (1+p^2)\,t = U(z\,.\,I)$$

Med U förstås en funktion af två oberoende variabler z och I:

$$I \equiv 1 + p^2 + q^2$$

Vi vilja söka reagenserna vid kategorien variation med den typiska eqvationen såsom utgångspunkt.

Det Mongeska systemet:

$$(1+q^2)\,\delta y^2 + 2pq\delta y\delta x + (1+p^2)\,\delta x^2 = 0$$

$$(1+q^2)\,\delta y\delta p + (1+p^2)\,\delta x\delta q = U(z, I)\,\delta y\delta x$$

$$\delta z = p\delta x + q\delta y$$

$$R \equiv 1+q^2 \qquad S \equiv -pq \qquad T \equiv 1+p^2 \qquad V \equiv U(z, I)$$

$$R_0 \equiv \frac{1+q^2}{i\sqrt{I}} \qquad S_0 \equiv \frac{-pq}{i\sqrt{I}} \qquad T_0 \equiv \frac{1+p^2}{i\sqrt{I}} \qquad V_0 \equiv \frac{U(z, I)}{i\sqrt{I}}$$

Operationskategorien $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R}_x \equiv -\left[\frac{-pq}{i\sqrt{I}}\frac{d}{dx} + \frac{1+p^2}{i\sqrt{I}}\frac{d}{dy} + \frac{U(z, I)}{i\sqrt{I}}\frac{\partial}{\partial q}\right]$$

$$\mathfrak{R}_y \equiv \frac{1+q^2}{i\sqrt{I}}\frac{d}{dx} - \frac{pq}{i\sqrt{I}}\frac{d}{dy} + \frac{U(z, I)}{i\sqrt{I}}\frac{\partial}{\partial p}$$

$$\mathfrak{R}_p \equiv \frac{pq}{i\sqrt{I}}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{1+q^2}{i\sqrt{I}}\frac{\partial}{\partial q}$$

$$\mathfrak{R}_q \equiv -\frac{1+p^2}{i\sqrt{I}}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{pq}{i\sqrt{I}}\frac{\partial}{\partial q}$$

Derivationskategorien $(\mathfrak{R})_0$:

$$(\mathfrak{R}_x)_0 \equiv -\frac{q}{i\sqrt{I}}\left(2\frac{\partial U}{\partial I} - \frac{U}{I}\right); \qquad (\mathfrak{R}_y)_0 \equiv \frac{p}{i\sqrt{I}}\left(2\frac{\partial U}{\partial I} - \frac{U}{I}\right)$$

$$(\mathfrak{R}_p)_0 \equiv \frac{2q}{i\sqrt{I}}; \qquad (\mathfrak{R}_q)_0 \equiv -\frac{2p}{i\sqrt{I}}$$

Funktionen u_0:

$$u_0 \equiv \int \frac{1}{i\sqrt{I}}\left(2\frac{\partial U}{\partial I} - \frac{U}{I}\right)(-qdx + pdy) + \frac{2}{i\sqrt{I}}(qdp - pdq)$$

Derivatorna af funktionen iv_0:

$$\frac{div_0}{dx} \equiv p\left(2\frac{\partial U}{\partial I} - 3\frac{U}{I}\right); \quad \frac{div_0}{dy} \equiv q\left(2\frac{\partial U}{\partial I} - 3\frac{U}{I}\right); \quad \frac{\partial iv_0}{\partial p} \equiv \frac{2p}{I}; \quad \frac{\partial iv}{\partial q} \equiv \frac{2q}{I}$$

Funktionen iv_0:

$$iv_0 \equiv \int\left[2\frac{\partial U}{\partial I} - 3\frac{U}{I}\right](pdx + qdy) + \frac{1}{I}(2pdp + 2qdq)$$

Vi sätta $pdx + qdy = dz$ och $2pdp + 2qdq = dI$; funktionen iv_0 antager då följande form:

$$iv_0 \equiv \log I + \int\left[2\frac{\partial U}{\partial I} - 3\frac{U}{I}\right]dz + \text{en konstant}$$

Funktionerna u_0 och iv_0 äro i predikamentet reaktion om den ena är exakt under det att den andra är icke-exakt. För funktionens iv_0 exaktheet tarfvas allenast det, att expressionen $2\frac{\partial U(z, I)}{\partial I} - 3\frac{U(z, I)}{I}$ är en funktion af variabeln z ensamt:

$$2\frac{\partial U}{\partial I} - 3\frac{U}{I} \equiv \mu(z)$$

Funktionen iv_0 antager nu följande form:

$$iv_0 \equiv \log I + \int \mu(z)\, dz + \text{en konstant}$$

Funktionsvärdet: $U = -\mu(z) \,.\, I + \nu(z)\, I^{3/2}$ identifierar eqvationen $2\frac{\partial U}{\partial I} - 3\frac{U}{I} = \mu(z)$; $\nu(z)$ antages vara liksom $\mu(z)$ en arbiträr funktion af z. Vi särskilja alltså *tre* fall.

1) $\mu(z) = 0$ $\nu(z) = 0$; till detta fall hör ex. 11.
2) $\mu(z) \neq 0$ $\nu(z) = 0$ » » » » » 12.
3) $\mu(z) = 0$ $\nu(z) \neq 0$ » » » höra exemplen 13: a och 13: b såsom olika specifikationer af funktion $\nu(z)$.

Funktionen u_0 är icke-exakt vid alla de nämnda fallen. *Vi ha funnit att kategorien variation faller ut i en bestämd mening eller med de särskilda exemplen 11, 12, 13, såsom de rena möjligheterna hos den typiska eqvationen, då reagenserna fiveras, m. a. o. då villkoret för reaktion fasthålles.*

»Une intégrale est, en général, determinée, comme l'a montré Canchy, si on se donne une courbe situé sur cette surface intégrale et le plan tangent en chaque point de cette courbe, pourvu qu'on suppose cette intégrale représentée par un développement en série entière; c'est la recherche de cette integrale particulière qui constitue le problème de Cauchy.» (E. Goursat, Leçons sur l'intégration des eqvations aux dérivées partielles du second ordre).

Begreppet *integral* gäller icke omedelbart för icke-integrabla kombinationer (för Monges system t. ex.); kunde integralbegreppet generaliseras eller utvidgas, så skulle det kunna gälla. Cauchys determination är en generalisation af integralbegreppet; Monges problem i allmänformen får dock icke sin lösning genom den.

Svårigheten med Cauchys integralbegrepp (gifvet såsom ofvan) ligger i öppen dag: det inrymmer *partikulariteter*, specifikt geometriska element (»*surface* integrale», »*plan* tangent», »*courbe*»); men generaliserande *innebär icke*, utan *utesluter* fastmer upptagandet af partikulariteter.

I min framställning är begreppet *integral* hänfördt uteslutande till begreppet om ett *determineradt differentialsystem;* jag har undvikit att generalisera i Cauchys mening (eller så som ofvan). Med *integrationen af ett icke-determineradt differentialsystem* (af Monges system t. ex.) har jag förstått *uppsökandet af det determinerade differentialsystem, till hvilket det icke-determinerade systemet står i ett nödvändigt sammanhang.* Det determinerade system som sammanhänger nödvändigt med det Mongeska har jag framlagt i § 2 mom. 2; det betecknas genom ekvationen non-$\mathfrak{I}_{iv_0}\chi = 0$. Jag har bevisat sammanhanget (i § 2 mom. 3) genom *egentlig* (icke matematisk) *induktion*, på ett förberedande sätt alltså. Jag anmärker om *symmetrien* i integralkonstruktion non-$\mathfrak{I}_{iv^0}$.

Symmetrikonstruktionen non-$\mathfrak{I}_{iv_0}$ framstår såsom *rent analytisk bild:* såsom motsats mot ett med partikulariteter (geomemetriska element) behäftadt integralbegrepp; men motsatsen mellan analytisk bild och analytiskt-geometrisk kan icke vara radikal; den analytiskt-geometriska bilden kan vara ett *utvecklingsbegrepp* (S. Lies och Plüchers konstruktioner stå i det förhållandet till hvarandra) och så långt utvecklingen räcker är partikulariteten borta. Det måste alltså finnas *sammanhang* i motsatsen mellan analytisk och analytiskt-geometrisk bild. Jag har framlagt sammanhanget i *kategorien involution.* (§ 3 mom. 2), Från involutionskategorien $\mathfrak{I}_{u_0} = 0$, $\mathfrak{I}_{iv_0} = 0$ finnes anslutning — mer eller mindre omedelbart (jmfr exemplen 8:a och 8:b) — till de specifika bithörande begreppen (Plückers och Lies); men *rent omedelbart* befintligt, inlagdt i konstruktionerna $\mathfrak{I}_{u_0}$ och $\mathfrak{I}_{iv_0}$ själfva, är detta specifika, som hör till, *icke:* konstruktionerna $\mathfrak{I}_{u_0}$ och $\mathfrak{I}_{iv_0}$ äro symmetriska såsom konstruktionen non-$\mathfrak{I}_{iv_0}$

Då sammanhanget mellan det gifna icke-determinerade systemet och det determinerade system, som hör till det nödvändigt, fullföljes konseqvent, måste sammanhanget mynna ut i en motsats så skarp som motsatsen mellan determinationens art i systemen. Determinationens art är i det determinerade system *integration.* Om det-omedelbart gifna systemet, Monges system, benämnes indetermi-

neradt eller obestämdt, så ligger i benämningen den meningen, att systemet är icke-integrabelt, obestämbart *just från integrationssynpunkten*, omöjligt *just i den artbestämdheten*. I benämningen kan icke ligga den meningen, att systemet är obestämdt öfver hufvud, omöjligt att bestämma *med någon artbestämdhet;* låge denna mening i benämningen, så vore systemet icke ett problem för ren matematik. I § 4 mom. 1—2 har jag framlagt artbestämdheten i det indeterminerade systemet; jag har benämt den *kategorien reaktion*. Om reagenstypen har jag visat att den gäller såsom lösning framom integraltypen; jag har användt den på variationskalkylens uppgifter, så många de ingå i Monges system (§ 4 mom. 3).

Det är utan tvifvel af nöden att den förberedande bevisningen, den icke-matematiska induktionen (se ofvan!) ersättes genom matematisk bevisning. Sådan bevisning har jag sökt få till stånd i mitt arbete. Det Mongeska systemet i ett determineradt moment: Det determinerade moment som omtalas i det arbetet är icke identifieradt med någon af de här omtalade determinationerna, kategorierna integration, involution, reaktion; det determinerade momentet är föreställdt såsom en *annan* kategori, kategorien *kontakt*. Min mening vid detta förfaringssätt kan uttryckas så:

Att bevisa är att framlägga flere moment *i ordning;* kategorierna integration, involution, reaktion, äro från bevisningens synpunkt *moment i ordning*, men bevisningen blir klarare, formen, ordningen blir strängare, det hela blir mer fullständigt genomtänkt, ju *färre* de moment äro som skola bringas i ordning. Kategorien kontakt är ett moment som kan låta inordna sig *före* kategorierna integration, involution, reaktion. Jag har stannat vid kategorien kontakt, påverkad af dessa lättinsedda praktiska hänsyn. Jag har åsyftat *det snabba utformandet* af Monges system. Bevisningens karaktär är härmed angifven.

Det ifrågavarande arbetet är måhända okändt; det har refuserats (visserligen utan motivering) af vederbörande i Sverige, i Februari 1906 af K. Vetenskapsakademien i Stockholm.

Man plägar säga att vetenskapen befordras mer *positivt* genom nya problems ställande än genom gamlas lösande. Reagenstypen torde vara någonting nytt i matematiken. Betydelselös, ny i den meningen, kan typen icke vara; jag har uppvisat (eller

åtminstone antydt) reagensernas — funktionernas u_0 och iv_0 (§ 2. mom 1.) — samhörighet med *alla enhetsoperationer eller lösningar af lägre art (af integraltyp) som höra till uppgiften*, både med dem jag själf användt och med dem jag har mig bekant att andra användt. Att predikamentet reaktion är ett *abstrakt* (»filosofiskt») läge, en förklaring som tar tankeverksamheten i anspråk, torde icke vara en *objektiv* svårighet, icke en förklaringens egen. Ty får man antaga *det* såsom igenkänningstecknet på en adæqvat förklaring, *att den passar i stycke med declarandum*, så kan kategorien reaktion icke begripas vara annat än ett abstractum; *jämväl det mer bestämda declarandum*, variationskalkylens problemläge, är ett skäligen abstrakt begrepp (»idée très-abstraite», kanhända: »insaisissable» — Lindelöf). *Declarandum i allmänhet*, det som kan tänkas komma till förklaring i någon mån genom reaktionskategorien, är *de obestämda differentialsystemen* (de Pfaffska systemen) *i allmänhet*. Vill man afvisa min förklaring på grund af dess abstraktbet, så kräfves såsom det minsta, att man lägger fram ett problemläge som är *allmännare*, än det Pfaffska problemläget och som hör inom matematiken *bestämdt*. Ett sådant känner jag icke för min del.