

BOHLIN, KARL

**Om betydelsen af lefvande kraftens
princip för frågan om dynamiska systems
stabilitetet.**

Stockholm
1887

EOD – Miljoner böcker bara en knapptryckning bort. I mer än 10 europeiska länder!



Tack för att du väljer EOD!

Europeiska bibliotek har miljontals böcker från 1400-till 1900-talet i sina samlingar. Alla dessa böcker går nu att få som e-böcker – de är bara ett musklick bort. Sök i katalogen från något av biblioteken i eBooks on Demand- nätverket (EOD) och beställ boken som e-bok – tillgängligt från hela världen, 24 timmar per dag och 7 dagar i veckan. Boken digitaliseras och blir tillgänglig för dig som e-bok.

EOD bokens fördelar!

- Få samma utseende och känsla som med originalet!
- Använd ditt standardprogram för att läsa boken på skärmen, zooma och navigera genom boken.
- Skriv ut enstaka sidor eller hela boken.
- *Sök:* Använd fulltextsökning för enskilda fraser.
- *Klipp & klistra:* Kopiera bilder och delar av texten till andra applikationer (t.ex. ordbehandlingsprogram).

Villkor för användning

Genom att använda EOD-tjänsten accepterar du de villkor som ställs av biblioteket som äger den aktuella boken. EOD erbjuder åtkomst till digitaliserade dokument enbart för personlig, icke-kommersiell användning. För annan användning vänligen kontakta biblioteket.

- Villkoren på svenska: <http://books2ebooks.eu/odm/html/nls/sv/agb.html>

Fler e-böcker

Redan nu erbjuder 30 bibliotek från 12 europeiska länder denna service.

Mer information finns tillgängliga via <http://books2ebooks.eu>

OM

BETYDELSEN AF LEFVANDE KRAFTENS PRINCIP

FÖR FRÅGAN OM

DYNAMISKA SYSTEMS STABILITET

AF

KARL BOHLIN.

MEDDELADT DEN 9 FEBRUARI 1887 GENOM H. GYLDÉN.



STOCKHOLM, 1887.
KONGL. BOKTRYCKERIET
P. A. NORSTEDT & SÖNER.

OM

BETYDELSEN AF LEVANDE KRAFTENS PRINCIP

FÖR FRÅGAN OM

DYNAMISKA SYSTEMS STABILITET

KARL BOHLM

REKONSTRUERAT DEN 2 FEBRUARI 1887 GENOM H. GILDEK.

STOCKHOLM, 1887.
KONG. BOKTRYCKERIET
P. A. NORSTEDT & KÖNIG.

Till en stor grupp af dynamiska problem, nemligen alla sådana, för hvilka det existerar en kraftfunktion, som icke innehåller tiden explicite, kan man, som bekant, omedelbart finna en första integral, lefvande kraftens. Formen för denna integral tillåter ett betraktelsesätt, som i många fall leder till afgörandet af frågan, huruvida en viss rörelse är stabil, utan att man för detta ändamål behöfver känna problemets integraler i öfrigt. Begreppet af ett systems stabilitet uppfatta vi härvid, såsom det i astronomien är vanligt, så, att vi säga att systemet är stabilt, om ingen af de punkter, som tillhöra systemet under rörelsen aflägsnar sig oändligt långt bort från någon af de andra. Frågan härom låter sig nu på den antydda vägen besvara i alla de fall, då lefvande kraftens ekvation (eller någon däremot svarande) blott innehåller *en* rörlig punkts koordinater. Hit hör bland andra ett fall af rörelse, hvilket kan anses i det närmaste realiseradt genom åtskilliga kombinationer af tre kroppar inom vårt solsystem. Dessutom kunna äfven i allmännare fall rörelsernas gränser med användning af lefvande kraftens princip underkastas åtskilliga betraktelser, hvilka torde kunna vara af intresse, äfven om de icke räcka till ett fullständigt stabilitetskriterium.

För korthetens skull antaga vi i det följande alla rörelser försiggå i ett och samma fixa plan. Detta antagande innebär, som man skall se, icke någon väsentlig inskränkning och det är lätt att efteråt göra afseende äfven på den tredje dimensionen. Vi betrakta, för att fixera begreppen, ett typiskt fall, i det vi nämligen antaga, att ekvationerna för en punkts rörelse leda till en första integral af formen

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - f(x, y) + h = 0,$$

där ds är differentialen af punktens väg, x, y dess koordinater samt h integrationskonstanten. I de flesta af hithörande problem är funktionen $f(x, y)$ uttryckt i punktens båda afstånd

r och ϱ från tvenne andra punkter, och då det synes fördelaktigt att bibehålla dessa bipolära koordinater under diskussionen, vilja vi redan från början förutsätta, att integralen är gifven under formen

$$(1) \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - f(r, \varrho) + h = 0$$

Uppställa vi nu ekvationen

$$(2) \quad f(r, \varrho) - h = 0,$$

så betecknar den samma i allmänhet en kurva, hvilken enligt (1) är så beskaffad att punktens hastighet är noll, om den befinner sig på denna kurva, under det att ekvationen

$$(3) \quad f(r, \varrho) - h = \Delta h$$

betyder en kurva, i hvilken punktens hastighet har värdet Δh . Vi bemärka, att kurvorna (2) och (3) på grund af koordinaternas natur äro symmetriska med afseende på den axel, som förenar utgångspunkterna för r och ϱ . Är $\frac{dr}{d\varrho}$ ändlig, så äro kurvorna sammanhängande. Kurvorna (2) och (3) kunna icke skära hvarandra; ty om skärningspunkten vore r', ϱ' så skulle man samtidigt hafva

$$\begin{aligned} f(r', \varrho') - h &= 0 \\ f(r', \varrho') - h &= \Delta h \end{aligned}$$

hvilket icke är möjligt, så länge Δh är skild från noll. Genom kurvan (2) uppdelas planet i gebiet och detta i allmänhet på ett sådant sätt, att uttrycket

$$f(r, \varrho) - h$$

byter tecken, då man passerar kurvan. Ty om det vore möjligt att det i frågavaraude uttrycket vore t. ex. positivt omedelbart på båda sidor om kurvan (2), så vore ju det samma på denna kurva ett minimum. Man skulle i sådant fall hafva

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial \varrho} = 0.$$

Bortser man från dylika undantagsfall, så gäller det alltså om uttrycket

$$f(r, \varrho) - h,$$

att om det samma är positivt på ena sidan af kurvan (2), så är det negativt på den motsatta. Det är denna omständighet, man kan begagna för att uppställa problemets stabilitetsvilkor. Ty då

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = f(r, \varrho) - h$$

och om detta uttryck blir negativt inom ett visst område af planet, så kan den rörliga punkten ej i något ögonblick befinna sig inom detta, enär i sådant fall dess hastighet skulle vara imaginär. Är kurvan af den beskaffenhet att denna orimlighet skulle inträffa för oändligt stora värden af r och ϱ , så är därmed rörelsens stabilitet faststeld. Gränskurvans existens och natur är väsentligt beroende af integrationskonstanten h . Denna åter är bestämd af begynnelseläget samt af begynnelsehastighetens belopp men ej af dess riktning, i det att man har

$$h = f(r_0, \varrho_0) - \left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2.$$

Vi vilja tillämpa dessa principer först på tvåkropparproblemet. Af problemets differentialekvationer

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu y}{r^3} = 0$$

följer lefvande kraftens ekvation

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} = 0,$$

då $\frac{\mu}{a}$ står i stället för h . Antaget att man ej fullständigt kunde lösa differentialekvationerna och att den verkliga rörelsen vore obekant, så är det på grund af det sagda dock möjligt att afgöra frågan om rörelsens stabilitet. Ekvationen (2) blir i detta fall af enklaste natur, nemligen

$$r = 2a$$

Om a är positiv veta vi alltså att rörelsen ständigt försiggår inom en cirkel med radien $2a$; ty utanför den samma blir uttrycket

$$\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$$

negativt. Om a är oändlig eller negativ, så existerar denna cirkel icke mer. Detta är såsom vi af den fullständiga lösningen veta, parabelns och hyperbelns fall, under det att ett positivt värde af a motsvarar en elliptisk, d. v. s. stabil rörelse.

Öfvergå vi nu till det fall då en rörlig punkt attraheras mot tvenne fasta centra, så är lefvande kraftens ekvation för denna punkts rörelse af formen

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \frac{2m}{r} - \frac{2\mu}{\varrho} + h = 0,$$

hvarrest r och ϱ äro den rörliga punktens afstånd från de fasta masspunkterna m och μ . Gränskurvans ekvation blir sålunda

$$\frac{2m}{r} + \frac{2\mu}{\varrho} = h$$

och det är lätt att inse att, så länge h är positiv, härigenom representeras en kurva, som till sin form i det väsentliga är af lemniskatans natur. Antagas massorna m och μ gifna, kan man tänka sig ett så litet positivt värde af h , att kurvan kommer att bestå af en enda bransch, som omsluter de båda attraktionscentra. Å andra sidan kan man tänka sig h så stort, att vår kurva delar upp sig i tvenne branscher, hvardera omslutande en af punkterna m och μ . På öfvergången mellan dessa båda fall står den form af kurvan, då den består af

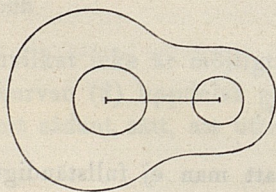


Fig. 1.

tvenne branscher, hvilka sammanhånga i en punkt på föreningslinjen mellan de fixa masspunkterna. Om h är positiv, så är alltså den uppkommande rörelsen stabil, oberoende af alla öfriga integrationskonstanter värden, emedan den rörliga punkten icke kan gå utöfver de gränser som betecknas af nämnda lemniskatartade kurva. Är åter integrationskonstanten h negativ, så existerar kurvan icke och vi kunna då på denna väg ingenting sluta om rörelsens stabilitet.

De båda fall, vi nu betraktat, äro, som vi veta, fullständigt integrerade och de bekanta integralerna erbjuda tillfälle till jämförelse med de här påpekade resultaten. Vi vilja nu öfvergå till ett fall, där detta icke är händelsen. Vi föreställa oss tvenne masspunkter m och μ , af hvilka den förra antages vara fix, medan den senare rör sig kring densamma i en cirkel

med radien a samt med vinkelhastigheten n . Vi antaga slutligen en tredje punkt P , som är fri och attraheras af de båda förstnämnda, utan att sjelf inverka på dem och ställa oss uppgiften att undersöka, om dess rörelse kan vara stabil. Detta system utgör i det närmaste en bild af åtskilliga grupper inom solsystemet, t. ex. af Jupiter och solen i deras samtida attraktion på en planetoid eller en komet.

Lägges ett fixt koordinatsystem med sitt origo i m och betecknas koordinaterna för punkterna μ och P i detta system med $a \cos nt$, $a \sin nt$, x, y resp. samt afstånden mP och μP med r och ρ , så blifva ekvationerna för punkten P 's rörelse följande

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{mx}{r^3} + \frac{\mu(x - a \cos nt)}{\rho^3} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{my}{r^3} + \frac{\mu(y - a \sin nt)}{\rho^3} = 0.$$

Sätta vi här

$$x = \xi \cos nt - \eta \sin nt$$

$$y = \eta \cos nt + \xi \sin nt,$$

i det att ξ, η beteckna punkten P 's koordinater relativt till ett koordinatsystem, hvars ξ -axel sammanfaller med punkten μ 's radiusvektor, så bortfaller i ekvationerna för den relativa rörelsen argumentet nt . Man erhåller nemligen

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n \frac{d\eta}{dt} - n^2\xi + \frac{m\xi}{r^3} + \frac{\mu(\xi - a)}{\rho^3} = 0$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2n \frac{d\xi}{dt} - n^2\eta + \frac{m\eta}{r^3} + \frac{\mu\eta}{\rho^3} = 0$$

Genom att multiplicera dessa ekvationer med $d\xi, d\eta$ resp., addera dem och sedan integrera, erhåller man en första integral, som motsvarar lefvande kraftens, nemligen

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - n^2r^2 - \frac{2m}{r} - \frac{2\mu}{\rho} + h = 0,$$

hvarst h är integrationskonstanten och $\frac{ds}{dt}$ är hastigheten i den relativa rörelsen. Detta resultat följer för öfrigt omedelbart genom ofvanstående substitutions användning på formeln (11) i Jacobis femte föreläsning *Über Dynamik*. Ekvationen för

gränskurvan, hvilken nu kommer att medfölja punkten μ i dess rotation, blir denna gång af den något mer komplicerade formen

$$(4) \quad n^2 r^2 + \frac{2m}{r} + \frac{2\mu}{\varrho} = h$$

För diskussionen af den samma vilja vi först tänka oss r och ϱ såsom rätvinkliga koordinater och vi måste då ytterligare i detta koordinatsystem införa villkoret för att de linjer, vi betecknat med a , r , ϱ , skola bilda en triangel. Det är lätt att inse, att detta villkor utesluter alla punkter i $r\varrho$ planet utom dem, som ligga inom ett band, begränsadt af de räta linierna

$$(5) \quad \begin{aligned} r - a &= \varrho \\ r + \varrho &= a \\ \varrho - a &= r \end{aligned}$$

I sakens natur ligger redan att blott punkter tillhörande den första kvadranten kunna komma i betraktande. Vi beteckna de delar af dessa tre räta linier, som falla inom den positiva kvadranten med I, II, III. Dessa linier motsvara i det bipolära systemet de delar af linien $m\mu$, som ligga resp. utom punkten μ , mellan m och μ samt utom punkten m , så att skärningspunkten (I, II) motsvarar punkten μ och skärningspunkten (II, III) punkten m . Därefter hafva vi att konstruera kurvan (4) och tillse, om den möjligen ytterligare begränsar spelrummet för punkten r, ϱ . Den bild vi sålunda erhålla af gränskurvan i detta koordinatsystem är det sedan lätt att öfverflytta till det bipolära koordinatsystemet.

Till en början antaga vi att $m = 0$. Ekvationen (4) öfvergår då i följande

$$(6) \quad n^2 r^2 + \frac{2\mu}{\varrho} = h$$

hvaraf, sedan man betecknat

$$\frac{2\mu}{n^2} = x^3; \quad \frac{h}{n^2} = \alpha^2, \quad 1)$$

erhålles

$$\varrho = \frac{x^3}{r^2 - \alpha^2}; \quad \frac{dr}{d\varrho} = \frac{1}{2x^3} \cdot \frac{(r^2 - \alpha^2)^2}{r}$$

1) Vi förutsätta således att h är positiv.

Man inser här af, att den del af kurvan, som motsvarar positiva värden af ρ , består af en med afseende på ρ -axeln symmetrisk bransch, hvilken assymptotiskt ansluter sig till de räta linierna

$$r^2 - \alpha^2 = 0$$

och som har en vertex i punkten

$$r = 0, \rho = \frac{\mu^3}{\alpha^2}$$

När α växer, förstoras kurvans dimensioner och dess vertex rycker närmare till origo. Uttrycket

$$n^2 r^2 + \frac{2\mu}{\rho} - h$$

är positivt på kurvans konvexa sida. — Sammanställes nu denna bild af kurvan med bilden af det band, som motsvarar (5), så inser man lätt, att man kan gifva åt α ett så stort värde, att kurvan kommer att skära först endera af linierna *II*, *III*, därefter linien *I*, därefter änyo linien *I* och slutligen linien *III*. Af det ifrågasvarande bandet afskäras sålunda tvänne delar, inom hvilka punkten r, ρ kan vara belägen: för det första ett slutet område åt origo till och till hvilket punkten (*I*, *II*) eller μ hör, för det andra ett obegränsadt område, som från bandets oändligt långt aflägsna del sträcker sig fram och begränsas af kurvan. Dessa båda områden äro i figuren ut-

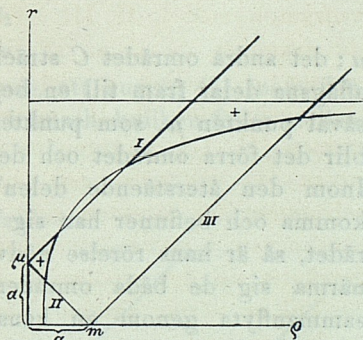


Fig. 2.

märkta med ett +. Mellan dessa båda områden gifves det ett tredje, inom hvilket punkten r, ρ icke kan vara belägen. Minskas värdet på α , så närma sig de båda skärningspunkterna af kurvan och linien *I* hvarandra, tills de slutligen sammanfalla i en tangeringspunkt. Om man ytterligare minskar α , träffar kurvan öfver hufvud icke linien *I* och de båda områden, om hvilka vi talade flyta tillsammans till ett. När slutligen α sjunkit under en viss gräns, träffar kurvan icke mera någon af de tre linierna *I*, *II*, *III* och spelrummet för punkten

r, ϱ har ej mera någon annan gräns än den, som bildas utaf dessa tre linier. Öfverflytta vi nu denna föreställning på det bipolära koordinatsystemet, så finna vi lätt följande resultat. Om integrationskonstanten h har ett tillräckligt stort positivt värde, så afskiljas till följd af lefvande kraftens princip tvenne områden af planet, inom hvilka punkten P kan befinna sig under sin rörelse. Det ena är ett slutet område B kring punkten

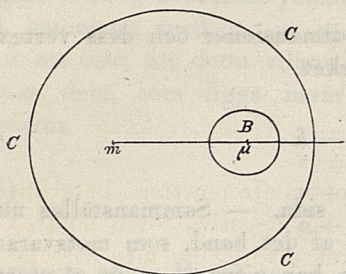


Fig. 3.

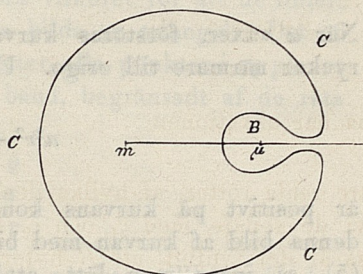


Fig. 4.

μ ; det andra området C sträcker sig från planets oändligt långt aflägsna delar fram till en begränsningskurva hvilken omfattar såväl punkten μ , som punkten m . Ju större h är, desto mindre blir det förra området och desto mera inkräktas af det senare. Inom den återstående delen af planet kan punkten P icke komma och befinner han sig från början inom det slutna området, så är hans rörelse nödvändigt stabil. När h minskas, så närma sig de båda områdena hvarandra, tills de slutligen sammanflyta genom en kanal, som vidgar sig kring kurvans axel utanför punkten μ . Aftager h än ytterligare, så minskas mer och mer det område, där möjligheten för rörelse är utesluten, och sammankrymper slutligen till en punkt.

Behandlingen af det fall, då m icke är noll, gestaltar sig på alldeles liknande sätt. Gränskurvans ekvation, i hvilken vi måste förutsätta integrationskonstanten h positiv, blir

$$(7) \quad n^2 r^2 + \frac{2m}{r} + \frac{2u}{\varrho} = h$$

hvaraf, om till de förut införda beteckningarna ännu läggas följande

$$\frac{2m}{n^2} = k^3$$

$$r^3 - \alpha^2 r + k^3 = R,$$

nedanstående, för diskussion af kurvan i rätliniga koordinater lämpade, uttryck erhållas

$$(8) \quad \rho = -\alpha^3 \frac{r}{R}; \quad \frac{dr}{d\rho} = \frac{1}{\alpha^3} \cdot \frac{R^2}{2r^3 - k^3}.$$

Antaga vi att

$$\alpha > k \sqrt[6]{\frac{27}{4}},$$

så har ekvationen

$$R = 0$$

tre reela rötter, af hvilka dessutom två äro positiva. Beteckna vi de senare med c_1 och c_2 samt den negativa roten med c_3 , så är det tydligt, att R byter tecken, hvar gång man passerar någon af de tre med ρ axeln parallela linierna

$$r = c_1$$

$$r = c_2$$

$$r = c_3.$$

På grund häraf är det lätt att inse, att kurvan (7) inom den positiva kvadranten blott har en bransch, hvilken faller mellan de räta linierna

$$r = c_1$$

$$r = c_2,$$

hvilka enligt (8) äro dess asymptoter. Kurvan har en vertex i den punkt, som motsvaras af

$$r = \frac{k}{\sqrt[3]{2}}.$$

Det är äfven lätt att visa, att denna vertex alt mera närmar sig origo och att asymptoterna alt mera aflägsna sig från hvar-

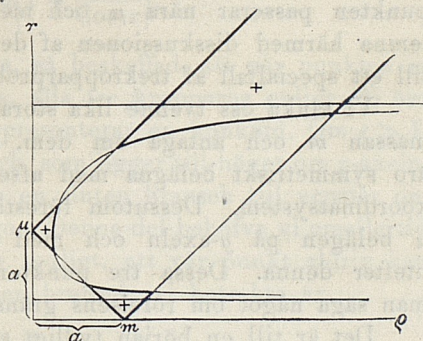


Fig. 5.

andra, ju mera α växer. Göres samma tillämpning häraf som nyss, så inses, att följande förhållanden måste ega rum.

När h är tillräckligt stor afskiljas på grund af vår betraktelse från planet i allmänhet trenne områden, inom hvilka punkten P kan röra sig: ett område A omslutande punkten m , ett område B kring μ samt slutligen området C beläget utanför en kurva, som inom sig innesluter A och B . För olika värden

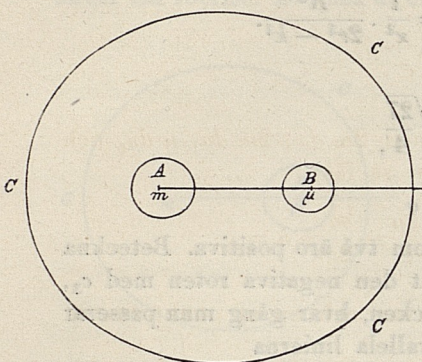


Fig. 6.

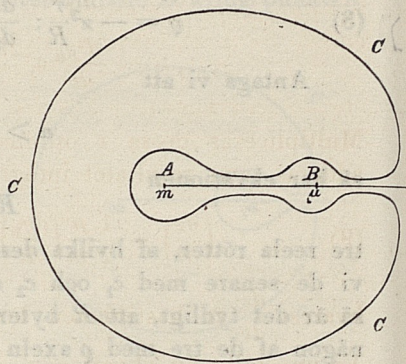


Fig. 7.

af α kan A sammanflyta med B eller B med C . I det förra fallet är rörelsen stabil kring m och μ . Af det senare inser man, att om integrationskonstanten har ett sådant värde att öppningen mellan B och C vore mycket smal, utsigterna för att en punkt från det yttre skulle komma in till närheten af A och B äro mycket små och att detta endast kan ske, i det punkten passerar nära μ och med en liten hastighet. — Vi lemna härmed diskussionen af detta problem för att öfvergå till ett specialfall af trekropparproblemet.

Vi tänka oss tvenne lika stora fria masspunkter, båda med massan m och antaga om dem, att de i ett visst ögonblick äro symmetriskt belägna med afseende på y -axeln af ett fixt koordinatsystem. Dessutom föreställa vi oss en tredje punkt μ belägen på y -axeln och med en hastighet, som är riktad utefter denna. Dessa tre punkter attrahera hvarandra. Kan man säga något om rörelsens gränser?

Det är till en början tydligt att om de symmetriförhållanden vi omnämnt gälla i ett visst ögonblick, de skola bestå i hvarje ögonblick af rörelsen. Till följd häraf behöfva vi blott betrakta den ena af punkterna m t. ex. den, som ligger till höger om y -axeln. Betecknas dess koordinater med x, y och

y -koordinaten för punkten μ med y_0 samt dessa punkters ömsidiga afstånd med r , så gälla följande rörelseekvationer.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu x}{r^3} + \frac{m}{4x^2} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu(y - y_0)}{r^3} = 0$$

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} + \frac{2m(y_0 - y)}{r^3} = 0$$

Multiplieras dessa i ordning med $2m dx$, $2m dy$, μdy_0 och adderas samt resultatet integreras, så fås

$$(9) \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\mu}{m} \left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} - \frac{m}{2x} + h = 0,$$

hvarst $\frac{ds}{dt}$ är hastigheten hos hvar och en af punkterna m .

Vi uppställa nu ekvationen

$$\frac{2\mu}{r} + \frac{m}{2x} - h = 0$$

eller efter införande af polarkoordinater och beteckningarna

$$a = \frac{2\mu}{h}; \quad \frac{m}{4\mu} = e,$$

ekvationen

$$(10) \quad r = a \left(1 + \frac{e}{\cos v}\right),$$

hvilken betecknar en kurva, så beskaffad, att när punkten m befinner sig på den samma, alla tre kropparna enligt (9) äro i hvila. Ekvationen (10) representerar en konkoid. Om $e > 1$, så existerar blott den bransch, som ligger till höger om y -axeln. Om $e < 1$, så finnes äfven en sluten bransch till venster om y -axeln med en spets i origo. Denna del behöfva vi emellertid ej betrakta, emedan det är tydligt, att vår punkt aldrig kan öfverskrida y -axeln. För den bransch, vi betrakta är

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\mu}{m} \left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} + \frac{m}{2r \cos v} - h = 0$$

Differentieras detta uttryck partielt med afseende på r , så erhålles

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\mu}{m} \left(\frac{dy_0}{dt} \right)^2 \right] = - \frac{1}{r^2} \left(2\mu + \frac{m}{\cos v} \right),$$

hvilket är en negativ kvantitet, så snart

$$-90^\circ < v < 90^\circ.$$

Man inser häraf, att punktens rörelse med säkerhet försiggår inom det område, som begränsas af y -axeln och kurvans bransch till höger därom. Man kan därför säga, att denna rörelse är stabil i x -axelns riktning.

Lefvande kraftens ekvation för det allmänna trekropparsystemet har följande form

$$(11) \quad m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + m' \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 + m'' \left(\frac{ds''}{dt} \right)^2 - \frac{c}{r} - \frac{c'}{r'} - \frac{c''}{r''} + h = 0,$$

hvarast r , r' r'' äro de tre ömsesidiga afstånden mellan m' och m'' , m'' och m , m och m' samt c , c' , c'' beteckna kvantiteterna $2m''m'$, $2m''m$, $2mm'$.

Vi uppställa nu ekvationen

$$(12) \quad \frac{c''}{r''} + \frac{c'}{r'} = H,$$

där vi betecknat

$$H = h - \frac{c}{r}.$$

Om nu h är positiv och man antager, att punkten m'' 's rörelse är så beskaffad att r faller mellan två ändliga gränser, och detta så att ständigt

$$(13) \quad H > 0,$$

så betecknar ekvationen (12) en i det föregående omnämnd kurva af lemniskatans natur och konstruerad på den rörliga radius vektor r , men denna gång med en variabel parameter H . På samma sätt som förut inses, att m ständigt måste befinna sig inom denna kurva. När r varierar, förändras äfven denna kurva till sin form, och den upphör att existera, så länge villkoret (13) icke är uppfyllt. Det är i detta sammanhang lätt att föreställa sig, att den omständighet, att en gränskurva icke finnes, ej är likbetydande med en instabil rörelse af punkten m . Föreställer man sig nemligen, att r beskriver en excentrisk bana, vore det möjligt, att kurvan under en viss tid icke existerade, men sedan slöte sig tillsammans.

Under denna senare del af rörelsen måste alltså punkten befinna sig inom det af kurvan begränsade området oberoende af hvilka vägar, den följt på den tid, då kurvan icke fans. — Vi hafva i det föregående förutsatt att punkten m' 's rörelse var så beskaffad, att den icke aflägsnade sig oändligt långt bort från m . Denna förutsättning kan emellertid bortfalla. Ty den omständigheten, att r blir oändligt stor kan icke hafva det inflytande, att H blir noll eller negativ, utan i detta fall är ju i stället

$$\lim_{r=\infty} H = h$$

d. v. s. en positiv kvantitet. Då emellertid afståndet r obegränsadt växer måste kurvan sluta med att dela sig i två branscher, en kring m' , den andra kring m'' ; och inom någondera af dessa måste punkten m slutligen befinna sig. Man kan alltså säga att hans rörelse är stabil i förhållande till den i fråga varande punkten. Samma betraktelsesätt kan nu tillämpas för hvar och en af de båda öfriga punkterna, hvarefter det omedelbart framgår, att de alla tre måste befinna sig på ändliga afstånd från hvarandra, så länge eller så ofta olikheterna

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{c}{r} &< h \\ \frac{c'}{r'} &< h \\ \frac{c''}{r''} &< h \end{aligned}$$

samtidigt äro uppfyllda. På enahanda sätt hade man kunnat ressonera, sedan man som ekvation för punkten m 's gränskurva i stället för (12) uppställt likheten

$$\frac{c'}{r'} + \frac{c''}{r''} = H_1,$$

då man betecknat

$$H_1 = h + m' \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 + m'' \left(\frac{ds''}{dt} \right)^2 - \frac{c}{r}$$

och analogt för de öfriga punkterna. I stället för vilkoren (14) hade man sålunda erhållit de gynsammare

$$\frac{c}{r} - m' \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 - m'' \left(\frac{ds''}{dt} \right)^2 < h$$

$$\frac{c'}{r'} - m'' \left(\frac{ds''}{dt} \right)^2 - m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 < h$$

$$\frac{c''}{r''} - m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 - m' \left(\frac{ds'}{dt} \right)^2 < h.$$

Om en punkt, hvars rörelse är begränsad genom en kurva, sådan som de, vi tänkt oss i det föregående, skulle uppnå sjelfva denna gränskurva där hans hastighet skulle blifva noll, så måste hans egen bana i denna punkt i allmänhet göra en spets. Vi veta också, att så är fallet i tvåkropparproblemet och vi kunna utan vidare se, att detsamma äfven kan ega rum vid det specialfall af trekropparproblemet vi i det föregående vidrört. Innan vi afsluta detta meddelande, vilja vi med afseende på denna sak härleda en slutsats, som omedelbart följer ur den s. k. ytintegralen. Tages en fix punkt t. ex. systemets tyngdpunkt till origo, så får denna integral för trekropparproblemet formen

$$mr^2 \frac{dv}{dt} + m'r'^2 \frac{dv'}{dt} + m''r''^2 \frac{dv''}{dt} = k,$$

där k är en integrationskonstant och r, r', r'' hafva en annan betydelse än förut. Föreställer man sig nu, att punkten m uppnår gränskurvan (12), så äro i detta ögonblick alla tre kropparna i hvila. Man har således

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv'}{dt} = \frac{dv''}{dt} = 0$$

och följaktligen

$$k = 0.$$

För att denna gränskurva skall kunna uppnås, är det sålunda nödvändigt, att summan af ythastigheterna är exakt = noll. För ett system sådant, som solsystemet, där alla rörelser försiggå i samma led är detta icke möjligt, hvarföre också icke några spetsar kunna förekomma vid dessa rörelser.

Slutligen anmärka vi, att ofvanstående betraktelser med samma lätthet hade kunnat göras i tre dimensioner. I sådant fall blifva gränskurvorna ersatta af sådana gränssytor, som uppkomma genom de ifråga varande kurvornas rotation kring deras axlar.

www.books2ebooks.eu