Lundgren, Ferdinand

Matematik, fysik, mekanik : Lokusproblem

Stockholm
1899

EOD – Miljoner böcker bara en knapptryckning bort. I mer än 10 europeiska länder!

Tack för att du väljer EOD!
Europeiska bibliotek har miljontals böcker från 1400- till 1900-talet i sina samlingar. Alla dessa böcker går nu att få som e-böcker – de är bara ett musklick bort. Sök i katalogen från något av biblioteken i eBooks on Demand- nätverket (EOD) och beställ boken som e-bok – tillgängligt från hela världen, 24 timmar per dag och 7 dagar i veckan. Boken digitaliseras och blir tillgänglig för dig som e-bok.

EOD bokens fördelar!

- Få samma utseende och känsla som med originalet!
- Använd ditt standardprogram för att läsa boken på skärmen, zooma och navigera genom boken.
- Skriv ut enstaka sidor eller hela boken.
- *Sök*: Använd fulltextsökning för enskilda fraser.
- *Klipp & klistra*: Kopiera bilder och delar av texten till andra applikationer (t.ex. ordbehandlingsprogram).

Villkor för användning

Genom att använda EOD-tjänsten accepterar du de villkor som ställs av biblioteket som äger den aktuella boken.

- Villkoren på svenska: http://books2ebooks.eu/odm/html/nls/sv/agb.html

Fler e-böcker

Redan nu erbjuder 30 bibliotek från 12 europeiska länder denna service.
Mer information finns tillgängliga via http://books2ebooks.eulla boken.

- http://search.books2ebooks.eu/

Maten
BS

1899

Matematik
Fysik
Mekanik

D. F. Lundgren,
Malmskilnadsgatan 3 A.

Privatundervisning i **algebra** och **ekvationsteori, geometri** samt **allmän och matematisk fysik** meddelas af

D. F. LUNDGREN,
Filosofie kandidat.
Malmskilnadsgatan 3 A, 3 tr.

Allm. telefon: Brunkeberg 803. Träffas säkrast 4—5 e. m.

Under *höstterminen 1899* ämnar undertecknad gifva en

kurs i geometrisk problemlösning
och **plan analytisk geometri,**

afsedd att omfatta gängse fordringar för **högre** *betyg i mogenhetsexamen å reallinien* och närmast afpassad för elever, som sedermera ämna söka inträde vid **Tekniska Högskolan, Skogsinstitutet** eller **Militärläroverken.**

Tid och lokal meddelas sednare.

Anmälan af elever kan ske muntligen eller i bref till min adress.

Stockholm den 10 April 1899.

D. F. LUNDGREN.
Filosofie kandidat.
Malmskilnadsgatan 3 A.

MATEMATIK, FYSIK, MEKANIK.

Några analytisk-geometriska uppgifter.

Allmänna gången vid lösningen af ett »lokusproblem».

Ett geometriskt lokus eller en geometrisk ort är fullständiga samlingen af alla de punkter, som ega en viss egenskap.

I ett plan innehålles en sådan samling vanligen i en eller flera sammanhängande linier, hvilkas alla punkter ega denna egenskap, och utom hvilka en punkt med samma egenskaper icke kan ligga.

Ett lokusproblem är uppgiften att ådagalägga formen och läget af den eller de linier, som utgöra sammanfattningen af alla punkter med viss gemensam egenskap. I den syntetiska geometrien löses ett lokusproblem genom att uppvisa, att de ifrågavarande punkterna utom den angifna egenskapen gemensamt ega en annan, som användts såsom definition för viss linie. Så t. ex. visar man, att spetsarna i rätvinkliga trianglar, som uppritas med en gifven linie såsom hypotenusa, alla ligga på lika afstånd från hypotenusans midtpunkt, d. v. s. på en cirkelperiferi.

I den plana analytiska geometrien löses ett lokusproblem genom att söka en ekvation mellan kordinaterna för en punkt hvilken som helst, tillhörande ifrågavarande lokus, och genom att uppvisa, att denna ekvation tillhör någon form, hvars geometriska motsvarighet är känd. Den undersökningsmetod man i allmänhet har att använda skulle kunna sammanfattas på följande sätt:

1°. Val af origo och koordinatsystem.

Äro icke origo och koordinatsystem bestämda i problemet, har man att träffa ett passande val af dessa grundelement, dels för att så mycket som möjligt förenkla den följande deduktionen, dels för att den slutliga ekvationen må få en enkel och lätt igenkänlig form. För detta ändamål undersöker man, om vissa gifna punkter eller linier hafva säregna egenskaper (t. ex. äro midt- eller skärningspunkter, symmetriaxlar o. d.) eller om punkter eller linier med sådana egenskaper kunna framkonstrueras ur det gifna. En midtpunkt eller skärningspunkt väljer man ofta med fördel till origo, en symmetriaxel eller ett par skärande linier till koordinataxlar.

Denna regel är — om också i många fall användbar — dock långt ifrån tillräcklig. Valet af koordinatsystem kan ofta nog icke med fördel träffas utan större analytisk erfarenhet. Till ledning kan dock i dylika fall den omständigheten tjena, att om valet af origo och koordinatsystem under den följande räkningens gång visar sig mindre lämpligt, man ofta nog just i de uppståndna olägenheterna kan finna en anvisning till lämpligare val af grundelement.

2°. Problemets reduktion till ekvationsform.

Ett geometriskt lokus definieras oftast på något af följande tre sätt, hvilka dock ej fullt utesluta hvarandra:

a) genom angifvandet af en för alla dess punkter gemensam egenskap.

β) genom en punkts rörelse, bestämd på det sätt, att hvarje punktens läge fixeras genom *konstruktion* af en viss figur, hvars föränderliga delar bestämmas genom en godtycklig storhet, hvaraf de bero (en ***variabel hjelpkvantitet.****)

---

* Till undvikande af förvexling användes icke här det gängse uttrycket »*variabel parameter*».

γ) såsom en samling punkter, af hvilka hvar särskild är bestämd på visst sätt i förhållande till en viss linie, tillhörande en familj, definierad genom en angifven ekvation, hvari utom de löpande koordinaterna en ***variabel kvantitet*** ingår.

Nedan exemplifieras hvart och ett af dessa tre sätt:

α) Sedan man valt en punkt, som kan antagas tillhöra ifrågavarande lokus, utmärkt dess koordinater i figuren och betecknat dem med x och y (eller i polarkoordinater r och v), har man blott att, sedan nödvändiga hjelpkonstruktioner utförts, till *ekvationsform öfversätta den geometriska egenskapen,* då ekvationen för ifrågavarande lokus omedelbart erhålles. Denna ekvation söker man sedan genom »hyfsning» (bortskaffande af rotmärken o. d.) reducera till någon af de former, hvilkas geometriska betydelse man känner.

Exempel: *Sök lokus för alla punkter, som äro så belägna, att medelproportionalen mellan deras afstånd till två gifna fasta punkter är deras afstånd till de gifna punkternas midtpunkt.*

Till origo väljes midtpunkten O mellan de gifna fasta punkterna F och F_1, till positiv X-axel rigtningen OF och till Y-axel en genom O mot OF vinkelrät linie. Betecknas afståndet FF_1 med $2a$ och koordinaterna för en godtycklig punkt M, tillhörande förevarande lokus, med x och y, har man afståndet $MF_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$, $MF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ och $MO = \sqrt{x^2 + y^2}$. Punktens karakteristiska egenskap är $MF \,.\, MF_1 = \overline{MO}^2$ eller i analytisk form

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \,.\, \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = x^2 + y^2,$$

som alltså är liniens ekvation. Efter hyfsning erhålles

$$x^2 - y^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Linien är alltså en liksidig hyperbel med de gifna fasta punkterna till brännpunkter.

β) Är lokus definieradt på sätt i β) nämnes, har man först att undersöka, huruvida den gifna konstruktionen kan i någon mån *förenklas.* Efter val af ett godtyckligt värde för den *variabla hjelpkvantiten* framkonstruerar man på det uppgifna eller förenklade sättet en punkt. Denna punkt, som är *en punkt hvilken som helst på ifrågavarande lokus,* bestämmes såsom afskärningspunkten mellan tvenne linier, räta eller krokiga; med tillhjelp af hjelpkvantiteten bestämmas ekvationerna för dessa linier. Dessa ekvationer kunna framställas under den allmänna formen:

ekvationen för ena linien $F(x, y, p) = 0$ (läs: en funktion af x, y och $p = 0$)

ekvationen för den andra linien $f(x, y, p) = 0$ (läs: en annan funktion af x, y och $p = 0$), der p är den variabla hjelpkvantiteten.

Betecknas nu koordinaterna för lokuspunkten med ξ och η, så fås, emedan punkten ligger på begge linierna, ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} F(\xi, \eta, p) &= 0 \\ f(\xi, \eta, p) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Elimineras hjelpkvantiteten p ur detta ekvationssystem, erhålles en slutekvation mellan ξ, y och i problemet ingående konstanter

$$\Psi(\xi, y) = 0$$

(läs: en funktion af ξ och $y = 0$).

Denna ekvation är då ekvationen för angifna lokus.

Eliminationen.

Nyssnämnda ekvationer $F(\xi, \eta, p) = 0$ och $f(\xi, \eta, p) = 0$ medgifva naturligtvis icke i allmänhet elimination af p. Ofta är det omöjligt verkställa eliminationen eller ock erhålles, om den verkställes, ett så kompliceradt resultat, att det är bättre låta linien representeras af de begge ekvationerna tillsammans. Är t. ex. det erhållna ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned}\xi &= a(p - \sin p)\\ \eta &= a(1 - \cos p)\end{aligned}\right\},$$

kan man visserligen eliminera p, då slutekvationen

$$\xi = a \arccos \frac{a - \eta}{a} - \sqrt{2a\eta - \eta^2}$$

erhålles, men såsom synes är denna ekvation temligen komplicerad och lämpar sig mindre väl än ekvationssystemet att representera motsvarande linie. Ur ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned}\xi &= a(p - \sin p)\\ \eta &= a(p^2 - \cos p)\end{aligned}\right\},$$

kan man icke eliminera p, hvadan man är nödsakad låta linien representeras af ekvationssystemet.

Exempel på elimination.

1°. *Ekvationerna äro af första graden med afseende på hjelpkvantiteten.* I detta fall antaga ekvationerna formen

$$\left.\begin{aligned}Ap + B &= 0\\ A_1p + B_1 &= 0\end{aligned}\right\},$$

der A, B, A_1 och B_1 äro funktioner af ξ och η. Elimineras nu p medelst »additions- och subtraktionsmetoden», erhålles slutekvationen

$$AB_1 - A_1B = 0$$

såsom ekvation för förevarande lokus.

Exempel. *En rätvinklig $\triangle$ OAB är gifven; på kateterna OA och OB uppritas kvadraterna $OACD$ och $OBGF$. CB och AG skära hvarandra i M. Sök lokus för punkten M, då den räta vinkeln är fix, men hypotenusan flyttas parallelt med sig sjelf.*

Till origo väljes den räta vinkelns spets O, till X-axel rigtningen OA till Y-axel rigtningen OB. Är vidare $OA = a$ och $OB = b$, så får, om $A'B'$ är ett nytt läge hvilket som helst för hypotenusan, $OA' = pa$, $OB' = pb$, der p är en variabel hjelpkvantitet. Ekvationen för den linie, som motsvarar AG, blir då

$$y = \frac{pb}{-pa-pb}(x-pa) \text{ eller } y = -\frac{b}{a+b}(x-pa).$$

Ekvationen för den linie, som motsvarar BC, blir på samma sätt $y - pb = -\dfrac{a+b}{a}x$.

Lokuspunkten ligger på dessa begge linier. Betecknas dess koordinater med ξ och η, får ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} \eta &= -\frac{b}{a+b}(\xi - pa) \\ \eta - pb &= -\frac{a+b}{a}\xi \end{aligned}\right|$$

och genom elimination af p slutekvationen

$$b\eta - a\xi = 0.$$

Lokus är sålunda en rät linie genom O, vinkelrät mot AB.

2°). *Elimination af två variabla hjelpkvantiteter mellan tre ekvationer, af hvilka två äro af första graden med med afseende på hjelpkvantiteterna.*

Ofta är det lämpligt i st. för en hjelpkvantitet införa två, förbundna med hvarandra genom en vilkorsekvation, t. ex. koordinaterna för en punkt hvilken som helst på en känd linie. Erhåller man då ett ekvationssystem

$$\left.\begin{aligned} Ap + Bq + C &= 0 \\ A_1p + B_1q + C_1 &= 0 \\ \varphi(p, q) &= 0 \end{aligned}\right\},$$

(p och q variabla hjelpkvantiteter underkastade vilkoret $\varphi(p, q) = 0$), der A, B, C, A_1, B_1, C_1 äro funktioner af ξ och η, utföres eliminationen lämpligast genom att p och q medelst första-grads-ekvationerna uttryckas i A, B, C A_1, B_1, C_1, då man erhåller

$$p = \frac{BC_1 - B_1C}{AB_1 - A_1B}, \qquad q = \frac{A_1C - AC_1}{AB_1 - A_1B},$$

hvilka värden på p och q sedan insättas i ekvationen $\varphi(p, q) = 0$, då en ekvation mellan ξ, η och ingående konstanter erhållas.

Exempel. *Sök lokus för skärningspunkten mellan en tangent till ellipsen* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *och perpendikeln från focus mot samma tangent!*

Till variabla hjelpkvantiteter väljas här med fördel koordinaterna $x_1 y_1$ för en godtycklig punkt på ellipsen. Ekvationen för tangenten till ellipsen i samma punkt är

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

och ekvationen för den mot samma tangent vinkelräta linie, som går genom positiva fokus,

$$y = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - c).$$

Lokuspunkten $\xi\eta$ ligger på dessa begge linier och derigenom fås, om det vilkor, som binder $x_1 y_1$ med hvarandra, medtages, ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi x_1}{a^2} + \frac{\eta y_1}{b^2} &= 1 \\ \eta &= \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(\xi - c) \\ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad [a^2 - b^2 = c^2].$$

Medelst de begge första ekvationerna uttryckas x_1 och y_1 i ξ, η, a, b, c, och insättas de sålunda erhållna värdena på x_1 och y_1 i den sista ekvationen fås efter reduktion slutresultatet

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2,$$

ekvationen för en cirkel med origo till medelpunkt och a till radie.

3°. *Elimination af funktioner af variabla hjelpkvantiteter.*

Någon gång ingå i det ekvationssystem, ur hvilket elimination skall ske, *funktioner* af variabla hjelpkvantiteter, och det kan då vara lämpligt eliminera *funktionerna*. Är exempelvis ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} x^2(p^2+q) - y(p-1) + a &= 0 \\ x(p-1) + y(p^2+q) + b &= 0 \\ ax + by + c(p^2+q) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

är det bäst ur de begge första ekvationerna söka värdet af $p^2 + q$ och sedan insätta detta i den tredje ekvationen, då en ekvation erhålles, som saknar p och q.

4°. *Elimination af en vinkel.*

Om man såsom variabel hjelpkvantitet använder en vinkel, händer det ofta, att ekvationssystemet antager formen

$$a \cos p + b \sin p + c = 0$$

$$a_1 \cos p + b_1 \sin p + c_1 = 0$$

der a, b, c, a_1, b_1, c_1 äro funktioner af ξ och η.

Man fullständigar då ekvationssystemet med en tredje ekvation

$$\cos^2 p + \sin^2 p = 1,$$

söker medelst »additions- och subtraktionsmetoden» ur de första ekvationerna $\cos p$ och $\sin p$ uttryckta i a, b, c, a_1, b_1, c_1 och insätter de erhållna värdena i den tredje ekvationen, då såsom lätt visas, slutekvationen

$$(bc_1 - b_1c)^2 + (a_1c - ac_1)^2 = (ab_1 - a_1b)^2$$

erhålles, d. v. s. en relation mellan ξ och η samt i problemet ingående konstanta kvantiteter.

Exempel. *Sök lokus för skärningspunkten mellan normaler, som dragas till en ellips i ändpunkterna af två konjugatdiametrar.*

Är ellipsens ekvation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ligger tydligen punkten $\begin{matrix} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{matrix}$ (φ en variabel hjelpkvantitet) på ellipsen. Kallas denna punkt A, origo O och ena ändpunkten af den konjugatdiameter, som svarar mot AO för B, äro koordinaterna för punkten B tydligen $\begin{matrix} x = -a\sin\varphi \\ y = b\cos\varphi \end{matrix}$, ty 1°) de satisfiera ellipsens ekvation och 2°) då AO:s vinkelkoefficient är $\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi$ och BO:s $-\frac{b}{a}\cot\varphi$, är deras produkt $= -\frac{b^2}{a^2}$ d. v. s. AO och BO konjugatdiametrar.

Ekvationen för normalen i A kan sättas under formen

$$\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} - c^2 = 0$$

ekvationen för normalen i B under formen

$$\frac{ax}{\sin\varphi} + \frac{by}{\cos\varphi} + c^2 = 0. \qquad [c^2 = a^2 - b^2]$$

Lokuspunktens koordinater ξ och η skola satisfiera dessa begge ekvationer, alltså erhålles ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} \frac{a\xi}{\cos\varphi} - \frac{b\eta}{\sin\varphi} - c^2 &= 0 \\ \frac{a\xi}{\sin\varphi} + \frac{b\eta}{\cos\varphi} + c^2 &= 0 \\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi &= 1. \end{aligned}\right|$$

Genom »additions- och subtraktionsmetoden» erhålles ur de begge första ekvationerna

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{c^2(a\xi - b\eta)}{a^2\xi^2 + b^2\eta^2}, \qquad \frac{1}{\sin\varphi} = -\frac{c^2(a\xi + b\eta)}{a^2\xi^2 + b^2\eta^2}$$

d. v. s.

$$\cos\varphi = \frac{a^2\xi^2 + b^2\eta^2}{c^2(a\xi - b\eta)}, \qquad \sin\varphi = -\frac{a^2\xi^2 + b^2\eta^2}{c^2(a\xi + b\eta)}.$$

Insättes dessa värden i ekvationen $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, erhålles efter reduktion

$$2(a^2\xi^2 + b^2\eta^2)^3 - c^4(a^2\xi^2 - b^2\eta^2)^2 = 0.$$

5°. *Elimination af en parameter mellan två andra grads ekvationer.*

Är det resulterande ekvationssystemet af formen

$$Ap^2 + Bp + C = 0,$$
$$A_1p^2 + B_1p + C_1 = 0,$$

der A, B, C, A_1, B_1, C_1 äro funktioner af ξ och η, kan slutekvationen (»*eliminanten*») bildas ur ekvationerna på två sätt:

α) Betraktande p^2 och p såsom tvenne obekanta kan man medelst »additions- och subtraktionsmetoden» finna deras värden

$$p^2 = \frac{BC_1 - B_1C}{AB_1 - A_1B}, \quad p = \frac{AC_1 - A_1C}{A_1B - AB_1},$$

hvaraf naturligtvis följer

$$\frac{BC_1 - B_1C}{AB_1 - A_1B} = \left[\frac{AC_1 - A_1C}{A_1B - AB_1}\right]^2,$$

eller reduceradt

$$(AC_1 - A_1C)^2 - (AB_1 - A_1B)(BC_1 - B_1C) = 0 \ldots (1)$$

β) Man kan också upplösa de begge ekvationerna med afseende på p och likställa resultaten. Då erhålles

$$\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2A_1}$$

[dubbeltecknen oberoende af hvarandra]. Befrias denna ekvation från rotmärken, erhålles såsom resultat eliminanten

$$(BB_1 - 2AC_1 - 2A_1C)^2 -$$
$$-(B^2 - 4AC)(B_1^2 - 4A_1C_1) = 0 \ldots\ldots (2)$$

Vid problem af detta slag bör man alltid försöka begge här angifna metoder att eliminera. De olika formerna för kurvans ekvation i (1) och (2) äro nemligen geometriskt tolkade uttryck för olika egenskaper hos henne. Då den ena vägen leder till ett kompliceradt resultat, lemnar i allmänhet den andra ett desto enklare.

Exempel. *I ena ändpunkten af en diameter till en* *ellips* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *drages en tangent, i den andra en normal till ellipsen. Sök lokus för deras skärningspunkt?*

Om x_1, y_1 är en godtycklig punkt på ellipsen, är $-x_1$, $-y_1$ den diametralt motsatta. Ekvationen för tangenten i den förra punkten är $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$, ekvationen för normalen i den sednare $y + y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x + x_1)$. Lokuspunktens koordinater ξ, η skola satisfiera dessa begge ekvationer, och lägges härtill vilkorsekvationen för x_1 och y_1, fås ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi x_1}{a^2} + \frac{\eta y_1}{b^2} &= 1 \\ \eta + y_1 &= \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(\xi + x_1) \\ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} &= 1. \end{aligned}\right\}$$

De variabla hjelpkvantiteterna x_1 och y_1 elimineras genom substitution i de begge sista ekvationerna af det ur första ekvationen härledda värdet å y_1. Eliminanten till de begge erhållna ekvationerna bildas sedan enl. ofvanstående regler och är ekvationen för ifrågavarande lokus.

Anmärkning. Om bland de ekvationer, som innehållas i ekvationssystemet eller under deduktionen erhållas, finnes en som innehåller ξ och η utan att samtidigt innehålla någon af de variabla hjelpkvantiteterna, **så är denna ekvation just ekvationen för ifrågavarande lokus.**

Exempel. *Anmärkta fall inträffar exempelvis, om man vill söka lokus för midtpunkterna af parallela kordor i en parabel* $y^2 = 2px$.

γ) Är lokus bestämdt på sätt ofvan under γ) nämnes, har man att uttrycka den karakteristiska punktens koordinater ξ och η såsom funktioner af den variabla kvantiteten och mellan de sålunda erhållna ekvationerna eliminera den sistnämnde.

Exempel 1. Sök lokus för vertex till de parabler, som sammanfattas under den allmänna ekvationsformen $x^2 + px = ay$, *der* p *är en variabel kvantitet.*

Ekvationen kan skrifvas under formen

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = a\left(y + \frac{p^2}{4a}\right).$$

Betecknas koordinaterna för vertex med ξ och η, har man alltså

$$\xi = -\frac{p}{2}, \qquad \eta = -\frac{p^2}{4a}.$$

Elimineras p mellan dessa ekvationer, erhålles $\xi^2 = -a\eta$. Det sökta lokus är alltså en parabel.

Exempel 2. Till ellipser, representerade genom ekvationer af formen $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{p^2 + c^2} = 1$, *der* p *är en variabel kvantitet, (»konfokala ellipser») dragas tangenter, parallela med en gifven rigtning. Sök lokus för tangeringspunkterna!*

Äro tangeringspunktens koordinater ξ och η, blir ekvationen för en dylik tangent

$$\frac{x\xi}{p^2} + \frac{y\eta}{p^2 + c^2} = 1$$

d. v. s. vinkelkoefficienten, som skulle vara lika med en uppgifven konstant m, är $-\frac{(p^2 + c^2)\xi}{p^2\eta}$. Då dessutom punkten $\xi\eta$ skulle ligga på den motsvarande ellipsen, erhålles ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} -\frac{(p^2 + c^2)\xi}{p^2\eta} &= m \\ \frac{\xi^2}{p^2} + \frac{\eta^2}{p^2 + c^2} &= 1 \end{aligned}\right\},$$

hvarur p bortelimineras, då ekvationen för det sökta lokus erhålles.

Stockholm, Central-Tryckeriet, 1899.

Detta häfte sändes på begäran portofritt.

MATEMATIK, FYSIK, MEKANIK.

Matematik
Fysik
Mekanik

Lokusproblem

D. F. Lundgren,
Malmskilnadsgatan 3 A.